Projet de Note aux Comptes Rendus (7 juillet 1997)
Calcul des variations / Calculus of variations

Minimisation de fonctionnelles dans un ensemble de fonctions convexes

Thomas Lachand-Robert & Mark A. Peletier

T. L.-R. : Laboratoire d'Analyse Numérique, *Tour 55-65*, Université Paris–VI,
4 place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05.
M. P. : University of Bath, Claverton Down, Bath BA2 7AY (UK)

Résumé. On étudie les minimums de fonctionnelles de la forme $\int_\Omega f(\nabla u)$ où $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est un domaine borné, et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction régulière, parmi l'ensemble des fonctions $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ qui sont convexes et comprises entre deux fonctions fixées $\overline{u}$ et $\underline{u}$. De tels problèmes apparaissent dans différents domaines, et notamment dans le cas du problème de résistance minimale de Newton, comme exposé dans [2].
Dans le cas simple où f est convexe ou concave, on montre dans [3] que le minimum est atteint par $\overline{u}$ ou $\underline{u}$ si ces fonctions sont égales au bord. Si f est non-convexe, on prouve dans [4] que le minimum a une structure particulière dans la zone où il n'égale pas les contraintes : sur tout ouvert où il est différentiable, il n'est pas strictement convexe. Il s'agit donc d'un cas très spécial de fonction convexe, puisque presque toutes les fonctions convexes sont différentiables et strictement convexes (voir [8]) ; ceci montre également que le minimum des fonctions radiales donné par Newton n'est pas le minimum global dans ce problème.

Minizing functionals on a set of convex functions

Abstract. We investigate the minima of functionals of the form $\int_\Omega f(\nabla u)$ where $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ is a bounded domain and f a smooth function. The admissible functions $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ are convex and satisfy $\underline{u} \le u \le \overline{u}$ on Ω, where $\underline{u}$ and $\overline{u}$ are fixed functions on Ω. An important example is the problem of the body of least resistance formulated by Newton [2].
If f is convex or concave we show that the minimum is attained by either $\underline{u}$ or $\overline{u}$ if these functions are equal on $\partial\Omega$. In the case that f is non-convex we prove that any minimizer u has a special structure in the region where it is different from $\underline{u}$ and $\overline{u}$: in any open set where u is differentiable, u is not strictly convex. Convex functions with this property are 'rare' in the sense of Baire [8]. A consequence of this result is that the radial minimizer calculated by Newton does not attain the global minimum for this problem.

Abridged English Version

Note présentée par HAÏM BREZIS

We consider problems of the form

$$\inf_{u\in\mathcal{C}} \int_\Omega f(\nabla u) \tag{1}$$

where $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ is a bounded domain, $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ is smooth, and

$$\mathcal{C}=\{u\in C^0(\overline{\Omega});\ \underline{u}\le u\le\overline{u}\quad\text{and } u \text{ is convex}\}.$$

Here $\underline{u},\overline{u}\in C^0(\overline{\Omega})$ are fixed; we will suppose that $\underline{u}$ is convex. An important example is the problem of the body of least resistance formulated by Newton [2], where $\underline{u}$ and $\overline{u}$ are constant and $f(\xi)=f_N(\xi)=(1+|\xi|^2)^{-1}$.

We are interested in the behaviour of a minimizer u in the region $\Omega'=\{x\in\Omega;\ \underline{u}<u<\overline{u}\}$. In certain cases this region is simply empty:

Theorem 1. *Suppose that*

$$\underline{u}(x)=\overline{u}(x),\qquad\forall x\in\partial\Omega. \tag{2}$$

If f is strictly convex, the minimizer of (1) is unique and equal to $\overline{u}^{**}$, the convex regularisation of $\overline{u}$. If f is strictly concave, and if $\underline{u}$ is convex, then the minimizer of (1) is unique and equal to $\underline{u}$.

The proof of this theorem is given in [3]. The main building block is that if f is strictly convex and $u\in\mathcal{C}$, then for any affine function $\theta:\Omega\to\mathbb{R}$ the function $u\vee\theta=\max\{u,\theta\}$ satisfies $F(u\vee\theta)\le F(u)$ with strict inequality if $u\vee\theta\not\equiv u$. The theorem follows since $\overline{u}^{**}$ and $\underline{u}$ are precisely the maximal and minimal elements in $\mathcal{C}$.

We next turn our attention to functions f that are *nowhere convex,* i.e. at every point $\xi\in\mathbb{R}^2$ the Hessian matrix $d^2f(\xi)$ has at least one negative eigenvalue.

In particular f_N is concave near the origin and indefinite elsewhere and therefore satisfies this condition. For this case, since the mapping $t\in\mathbb{R}_+\mapsto f(t\xi)$ is decreasing for all $\xi\in\mathbb{R}^2$, a minimum necessarily assumes all values between the constants $\underline{u}$ and $\overline{u}$. Therefore the set Ω' where u does not coincide with the constraints is not empty. It is on this zone that we concentrate.

Almost all convex functions, in the sense of Baire category [8], are both differentiable and strictly convex. A minimizer of (1) is one of the rare exceptions:

Theorem 2. *Let u be a minimal solution of (1). If u is differentiable in an open set $\Omega_1\subset\Omega$ and if f is nowhere convex in $\nabla u(\Omega_1)$, then u is not strictly convex in Ω_1.*

The proof of this theorem is given in [4]; here we only discuss some consequences.

Corollary 1. *Under the conditions of Theorem 2, if ϕ is differentiable and strictly convex in an open subset of Ω_1, then $u-\phi$ is not convex.*

Consequently u is everywhere 'on the boundary of convexity'. Also, Corollary 1 implies that the Euler equation associated with (1),

$$F'(u)\cdot(u-v)=0,\quad\forall v\in\mathcal{C},\quad\text{or}\quad \operatorname{div} df(\nabla u)=0,$$

need not be satisfied. In fact, in the proof of Theorem 2 we show that—under the conditions of theorem—this equation is not satisfied, even restricted to some subdomain. This explains the failure of traditional differential calculus-approaches to this problem.

On examine des problèmes de la forme

$$\inf_{u\in\mathcal{C}} \int_\Omega f(\nabla u) \tag{1}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est un domaine borné, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction régulière ($C^{2,1}$ suffit), et

$$\mathcal{C} = \{u \in C^0(\overline{\Omega});\ \underline{u} \leq u \leq \overline{u} \quad \text{et } u \text{ est convexe }\}$$

avec $\underline{u}$ et $\overline{u}$ deux fonctions données dans $C^0(\overline{\Omega})$; $\underline{u}$ sera supposée convexe ici. Ce type de problème survient dans des problèmes de transport (cf. [1]), d'économie (cf. [6]) et est une formulation particulière (cf [2]) du célèbre problème de résistance minimale posé par Newton dans [5]. Dans ce dernier cas, on a $\underline{u} \equiv 0$, $\overline{u} \equiv c > 0$ (constante) et la fonction f est simplement $f_N(p) = (1 + |p|^2)^{-1}$.

Si la fonction $f(p)$ a un comportement adéquat à l'infini (par exemple si elle est minorée par une fonction affine en $|p|$) la fonctionnelle $F(u) := \int_\Omega f(\nabla u)$ est bornée inférieurement sur $\mathcal{C}$, et dans ce cas un minimum de (1) est atteint car l'ensemble $\mathcal{C}$ est compact dans la topologie de $W^{1,p}_{\text{loc}}(\Omega)$, où F est continue (cf. [2]) ; nous nous placerons toujours dans ce cas ici.

On s'intéresse ici au comportement d'un tel minimum u dans la zone $\Omega' := \{x \in \Omega;\ \underline{u} < u < \overline{u}\}$. Dans certains cas, cette zone est simplement vide :

Théorème 1. *Supposons que*

$$\underline{u}(x) = \overline{u}(x), \qquad \forall x \in \partial\Omega \tag{2}$$

Alors, si f est strictement convexe, le minimum de (1) est unique et égal à $\overline{u}^{**}$, la régularisée convexe de $\overline{u}$. Si f est strictement concave, et que $\underline{u}$ est convexe, alors le minimum de (1) est unique et égal à $\underline{u}$.

Nous renvoyons le lecteur à [7], par exemple, pour la définition de la régularisée convexe d'une fonction.

La démonstration complète de ce théorème se trouve dans [3]. Elle résulte essentiellement des propriétés des fonctions de la forme $u \vee \theta$, avec $u \in \mathcal{C}$ et θ affine (où $\vee$ désigne le maximum des deux fonctions, dont nous rappelons qu'il s'agit d'une opération interne à $\mathcal{C}$) ; on a en particulier le lemme suivant, que nous admettrons ici :

Lemme 1. *Si f est strictement convexe, $u \in \mathcal{C}$ et θ est une fonction affine telle que l'ensemble $\{x \in \overline{\Omega};\ \theta(x) > u(x)\}$ est non vide et inclus dans Ω, alors $F(u \vee \theta) < F(u)$.*

La démonstration du théorème suit facilement, $\overline{u}^{**}$ étant précisément l'élément maximal de $\mathcal{C}$ et $\underline{u}$ l'élément minimal. Il est possible de généraliser ce type de résultat de différentes façons, par exemple pour des fonctions $f(u, \nabla u)$, ou qui ne sont pas strictement convexe ou concave, etc. Ces points ainsi que l'importance de la condition (2) sont discutés dans [3].

Nous examinons à présent le cas de fonctions f plus générales, et notamment de fonctions «nulle part convexes» dans un ouvert $Q \subset \mathbb{R}^2$, au sens suivant : pour tout $\xi \in Q$, la matrice hessienne $d^2 f(\xi)$ a une valeur propre strictement négative. La fonction f_N en particulier vérifie cette condition dans $\mathbb{R}^2$ entier ; elle n'est donc pas convexe, mais est cependant concave dans un voisinage de l'origine. Pourtant, cette concavité n'est pas utile ici : en effet, il a été montré dans [2] que pour u minimal, $|\nabla u| \notin\ ]0, 1[$ (ce résultat peut aussi être montré en utilisant le théorème 1).

Dans le cas particulier où $f = f_N$, l'application $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto f(t\xi)$ est décroissante pour tout $\xi \in \mathbb{R}^2$; il en résulte que l'infimum de (1) (avec $\underline{u} \equiv 0$, $\overline{u} \equiv c$) atteint ses valeurs minimales et maximales ; comme il s'agit aussi d'une fonction continue, car convexe, on voit que Ω' ne peut être vide. Dans la suite, nous examinons le comportement d'un minimum u dans cette zone.

Presque toutes les fonctions convexes (au sens de Baire : cf. [8]) sont à la fois strictement convexes et différentiables. Ce n'est pas le cas pour une solution minimale de (1) :

Théorème 2. *Soit u une solution minimale de (1) ; s'il existe un ouvert $\Omega_1 \subset \Omega$ où u est différentiable, et que f n'est nulle part convexe dans $\nabla u(\Omega_1)$, alors u n'est pas strictement convexe dans Ω_1.*

Ce théorème est démontré dans [4]. Nous en discutons ici certains des aspects inhabituels. Ainsi, l'une des conséquences du théorème 2 est :

Corollaire 1. *Sous les conditions du théorème 2, si ϕ est différentiable et strictement convexe dans un sous-ensemble ouvert de Ω_1, alors $u - \phi$ n'est pas convexe.*

C'est en ce sens que u est «partout à la limite de la convexité». Il en résulte aussi que l'équation d'Euler associée au problème (1), c'est-à-dire

$$F'(u) \cdot (u - v) = 0, \quad \forall v \in \mathcal{C}, \quad \text{ou encore} \quad \operatorname{div} df(\nabla u) = 0$$

n'a en général pas de sens dans ce contexte ; en fait, il résulte de la preuve du théorème 2, exposée dans [4], que cette équation est presque partout fausse (voyez aussi le lemme d'instabilité ci-après). Ceci explique que les méthodes habituelles du calcul différentiel des variations ne puissent être utilisées ici.

Une version similaire de ce théorème nous été signalée précédemment par H. Berestycki et les auteurs de [2], mais en supposant u de classe C^2. Cette hypothèse est essentielle dans leur preuve (exposée aussi dans [4]) ; elle n'a pu être montrée pour ce type de problème, et elle ne nous semble pas pouvoir être vérifiée en général car presque toutes les fonctions convexes sont hors de C^2 (cf. [8]) et ce type de problème n'induit pas «d'effet régularisant» comme on peut en voir dans la théorie des équations aux dérivées partielles elliptiques par exemple.

La preuve du théorème 2 repose sur deux résultats intermédiaires, dont le premier au moins nous paraît avoir son propre intérêt :

Théorème 3. *Soit $\omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine convexe de bord C^1, et $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ une matrice symétrique dont la plus petite valeur propre est notée λ_1. Alors*

$$\inf_{\substack{\phi \in H_0^1(\omega) \\ \phi \text{ convex}}} \frac{\int_\omega M\nabla\phi \cdot \nabla\phi}{\int_\omega |\nabla\phi|^2} = \lambda_1.$$

On remarque qu'il s'agit d'une propriété bien connue, et élémentaire, lorsque ϕ varie dans $H_0^1(\omega)$ mais n'est pas astreinte à être convexe. Le lecteur peut donc s'étonner que le résultat reste le même avec cette contrainte supplémentaire. Cependant, alors que ω peut être n'importe quel ouvert dans le cas général, il est essentiel dans notre démonstration que son bord soit différentiable (et ω convexe, pour que l'ensemble admissible pour ϕ soit différent de $\{0\}$) ; sans cette hypothèse, nous pensons en fait que le résultat est faux ; l'infimum serait alors strictement supérieur à λ_1.

La preuve de ce résultat est donnée dans [4]. On y donne aussi une généralisation avec une matrice $M(x)$ dépendant (régulièrement) de $x \in \overline{\omega}$.

L'autre résultat important dans la preuve du théorème 2 est un «lemme d'instabilité» qui montre que lorsqu'on suppose qu'un minimum u est à la fois différentiable et strictement convexe, il existe au moins une fonction admissible $v \in \mathcal{C}$ (de la forme $v = u \vee \theta$ avec θ affine) telle que $F'(u) \cdot (u - v)$ n'est pas nul :

Lemme 2. *Soit u un minimum du problème 1, et supposons que u est différentiable et strictement convexe sur un ouvert Ω_1. Alors il existe au moins une fonction affine θ telle que l'ensemble $\omega := \{x \in \Omega;\ u(x) < \theta(x)\}$ est non vide et inclus dans Ω_1, et telle que*

$$\int_\omega df(\nabla u) \cdot \nabla(u - \theta) < 0.$$

Ce lemme montre que u ne peut être stable par de petites perturbations; en particulier, si l'on considère la fonction définie par

$$u_\varepsilon := \begin{cases} (1+\varepsilon)(u-\theta) + \theta & \text{dans } \omega \\ u & \text{dans } \Omega \setminus \omega, \end{cases}$$

alors on a $F(u_\varepsilon) < F(u)$ pour $\varepsilon > 0$ petit. La démonstration du théorème utilise principalement cette idée, mais avec un argument rendu plus complexe par le fait que la fonction u_ε ci-avant n'est pas admissible (elle n'est pas convexe) : il faut donc la modifier en considérant une fonction $v_\varepsilon := u_\varepsilon \vee \widehat{u}$ où $\widehat{u}$ est la plus petite fonction convexe satisfaisant la condition $\widehat{u} \equiv u$ hors de ω. On montre que si $\varepsilon > 0$ est assez petit, alors on a encore $F(v_\varepsilon) < F(u)$, bien que $v_\varepsilon \in \mathcal{C}$, ce qui donne une contradiction.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] Y. Brenier, *Polar factorization and Monotone rearrangement of Vector-valued functions*, Comm. Pure Appl. Math. vol. XLIV, (1991) pp. 375–417.
[2] G. Buttazzo, V. Ferone, B. Kawohl, *Minimum Problems over Sets of Concave Functions and Related Questions*, Math. Nachrichten, 173 (1993), pp. 71–89.
[3] T. Lachand-Robert, M. A. Peletier, *Extremal Points of a Functional on the Set of Convex Functions*, à paraître.
[4] T. Lachand-Robert, M. A. Peletier, *An Example of Non-convex Minimization and an Application to Newton's Problem of the Body of Least Resistance*, à paraître.
[5] I. Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (1686).
[6] J.-C. Rochet, P. Choné, *Ironing, Sweeping, and Multidimensional Screening*, to appear in Economica.
[7] R. T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton University Press (1970).
[8] T. Zamfirescu, *Baire Category in Convexity*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena 39 (1991), pp. 139–164. *See also : Nearly All Convex Bodies are Smooth and Strictly Convex,* Monatsh. Math., 103 (1987), pp. 57–62.