Analyse van De Nationale Rekentoets 2007

Tom Verhoeff*

Januari 2008 (versie 11)

Er zaten enige taalfouten in de oorsponkelijke opgaveteksten bij het TV-programma (die ik zoveel mogelijk verbeterd heb in mijn transcriptie). Hinderlijker vind ik de diversiteit in de notatie van getallen. Vergelijk 9.000 (proefsom 2), 2,50 (4), 3000 (14), 16.10 (15). Maar ook 5 min 42'86 (9).

Ik begrijp dat de hedendaagse gebruiker van getallen moet kunnen omgaan met diverse notaties. Dit is met name het gevolg van onze 'continentale' conventie om de komma als decimalenscheider te gebruiken, terwijl rekenmachines juist meestal de Angelsaksische conventie hanteren met de punt als decimalenscheider. Maar moet dat dan ook onderwerp zijn van een *reken*toets?

Het SI (*Système Internationale*) stelt dat bij duizendtallen alleen een kleine extra spatiëring tussengevoegd mag worden, maar geen punt of komma:

> "In numbers, the comma (French practice) or the dot (British practice) is used only to separate the integral part of numbers from the decimal part. Numbers may be divided in groups of three in order to facilitate reading; neither dots nor commas are ever inserted in the spaces between groups."[1]

Met betrekking tot tijdsintervallen is de notatie 5 min 42'86 een vreemde mengeling. In de sportwereld zou waarschijnlijk gewoon 5:42.86 worden geschreven (of desnoods 0:05:42.86). Het accentje (Eng.: *prime*) wordt wel gebruikt voor minuut maar niet voor seconde, met name bij het meten van hoeken: 5 (boog)minuten 42 (boog)seconden en 86 honderste wordt aangeduid met $5'42''86$.

In onderstaande analyse inventariseer ik: **V** *voorkennis* die eventueel nodig is, **B** welke *berekening* ten grondslag ligt aan het antwoord, **X** *extra* aandachtspunten en complicaties, **H** *handigheden* bij het (uit het hoofd) uitvoeren van die berekening, en **G** *generalisaties*. N.B. Er is i.h.a. meer dan één manier om een probleem op te lossen. Ik presenteer mijn persoonlijke voorkeur.

*T.Verhoeff@tue.nl

[1] *Resolution 7 of the 9th General Conference on Weights and Measures*. 1948.

1 Proefsommen

1. **V** $1\% = 1/100$; **B** $((1\,000\,000 - 850\,000) : 1\,000\,000) \times 100$; **H** "0-en wegstrepen"; **G** k is $(k : n) \times 100\%$ van n.

2. **V** 1 jaar $\approx$ 365 dagen, verwachte aantal = gunstige fractie keer totale aantal; **B** $(2 : 365) \times 16\,000\,000$; **H** herordenen: $((2 \times 160) : 365) \times 100\,000$; **X** is het aantal geboortes per dag gelijkmatig verdeeld over het jaar?

2 Eindronde

1. **V** a is deelbaar door b betekent dat $a : b$ geen rest laat; **B** $912 : 9$ en $912 : 6$; **H** 912 is deelbaar door 9 dan en slechts dan als de cijfersom ervan $(9 + 1 + 2)$ deelbaar is door 9; een getal is deelbaar door 6 dan en slechts dan als het getal deelbaar is door zowel 2 als 3 (omdat 2 en 3 priem zijn); deelbaar door 2 d.e.s.d.a. het getal even is, d.e.s.d.a. het laatste cijfer even is; deelbaar door 3 d.e.s.d.a. als de cijfersom deelbaar is door 3.

2. **V** 1 kg $=$ 1 000 g, prijs = prijs per gewicht keer gewicht; **B** $6{,}65 \times 538 : 1\,000$.

3. **B** $174 - 153 = 21$; **X** het is vooraf niet eenvoudig te bepalen welke getallen van belang zijn; aangezien een grootste getal gezocht wordt lijkt het toch verstandig om met de grootste kandidaten te beginnen; de lijst is niet gesorteerd, wat opzoeken lastiger maakt; het gaat hier meer om het vinden van een *algoritme* dan een "gewone" rekensom; **G** gegeven een verzameling V van getallen bepaal $\max\{\, a + b \mid a \neq b \wedge a, b, a + b \in V \,\}$.

4. **V** 1 m $=$ 100 cm, 1 cm $=$ 10 mm; **B** $(2{,}50 \times 100 - 24 \times 10) \times 10 : (24 + 1)$; **X** er is één voeg meer dan er tegels zijn; **G** bij muurafstand m in meter, aantal tegels a, tegelbreedte b in cm is de berekening van de voegbreedte in mm: $(m \times 100 - a \times b) \times 10 : (a + 1)$.

5. **B** ondergrens $1{,}2 \times 550 = 660$, bovengrens $1{,}3 \times 600 = 780$; **H** de vier keuzemogelijkheden liggen 100 uit elkaar; $0{,}1 \times 500 = 50$.

6. **V** 1 uur $=$ 60 min; **B** $60 : (8{+}3) = 5$ rest 5 en voor de rest geldt $0 < 5 < 8$.

7. **B** $25 + (10 - 1) \times (45 - 25) : (5 - 1)$; **X** elk *extra* mandje voegt evenveel toe, en wel $(45 - 25) : (5 - 1)$; fout: $(10 : 5) \times 45$.

8. **V** conversie mijl/u $\to$ km/u; **B** $70 \times 1{,}6 = 112 < 120$, $60 \times 1{,}6 = 96 > 80$.

9. **V** 1 minuut $=$ 60 seconden; **B** $\min\{\, 1'51''00, 3'46''66 - 1'51''00, 5'42''86 - 3'46''66, 7'39''18 - 5'42''86 \,\}$; **H** aanvullen tot hele minuut levert benaderde 500 m tijden $9'' + 1'51''$, $13'' + 1'43''$ en $17'' + 1'39''$; **X** vergeet de eerste 500 m niet, die is gewoon gegeven; de overige drie zijn duidelijk meer.

10. **V** $1\% = 1/100$; **B** zij $n = m + m \times 10 : 100$, is dan $n - n \times 10 : 100$ kleiner of groter dan m; **H** $p\%$ bij m doen is hetzelfde als $m \times (1 + p : 100)$ en $p\%$ eraf is $m \times (1 - p : 100)$; de vraag is dus of $(1 + 10 : 100) \times (1 - 10 : 100) = 1{,}1 \times 0{,}9 = 0{,}99$ kleiner/groter is dan 1; **X** dit gaat al richting algebra.

11. **V** tientje = 10 (euro); **B** $(5 + 20 + 12 + 33 + 1 + 21) : 10$ (afronden); **H** bij afronden van de bedragen op een hele euro zit je er telkens hooguit 0,50 euro naast, dus in totaal hooguit $6 \times 0{,}50 = 3$ euro en dat is goed genoeg om het aantal tientjes te bepalen.

12. **V** oppervlakte vierkant = lengte kwadraat; **B** $\sqrt{225} + 2 \times 2$, waarbij $\sqrt{a}$ de *wortel* van a is, d.w.z. er geldt $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$; **X** de lijstbreedte moet *twee* keer worden bijgeteld (links en rechts, of boven en onder).

13. **B** $10 + (4 + 3 + 2 + 1)$; **X** dit vergt misschien ook wel ruimtelijk inzicht; het plaatje was niet erg duidelijk.

14. **V** 1 kilo $=$ 1 000 g, 1 miljoen $=$ 1 000 000; **B** (200 000 000 : 1 000) : 1 000; **H** “0-en wegstrepen”; **X** guldens zijn wat ouderwets

15. **B** bepaal van elke keuzemogelijkheid het totaalbedrag en vergelijk met 16.10: 4×3.85, $2 \times 3.85 + 2 \times 2.80$, $2 \times 3.85 + 3 \times 2.80$, 6×2.80; **H** merk op dat $3.85 = 7 \times 0.55$ en $2.80 = 7 \times 0.40$, verder is $16.10 : 7 = 2.30$; **X** ook dit gaat al richting algebra en algoritmen.

16. **B** $1 + (26 - 5) : (5 - 4)$; **X** dit is een bekend soort probleem; vergelijk met som 7 (de stapel mandjes); let op dat de laatste dag de slak bij bovenkomst zijn doel heeft bereikt en terugzakken derhalve niet meer van toepassing is.

17. **B** ?; **X** dit vergt ruimtelijk inzicht, geen rekenen; hooguit bij de vaststelling dat plaatje 1 te weinig rood heeft; plaatjes 2 en 4 vallen ook snel af.

18. **B** $5/8 = 0{,}625$, $2/3 = 0{,}666\ldots$, $1/2 = 0{,}5$.

19. **B** $6 : (2 + 1)$ (maar ja, hoe kom je daar bij?); **H** kraan A heeft hetzelfde effect als twee kranen B; dus de vraag is hoe snel drie (2+1) kranen B er over doen. **G** als kraan A er u uur over doet en kraan B doet er v uur over, dan kost het samen $u \times v : (u + v)$ uur.

20. **V** gemiddelde van a en b = $(a + b) : 2$, oktober heeft 31 dagen (dat een maand ongeveer 30 dagen heeft blijkt goed genoeg te zijn); **B** $(106 + (106 - 130)) : 31$.

21. **V** 1 m $=$ 100 cm, 1 m^3 $=$ 1 000 liter, volume van een rechthoekig blok = lengte keer breedte keer hoogte; **B** $5 \times 3 \times 0{,}4 \times 1\,000$.

22. **V** 1 kilo $=$ 1 000 g, 1 liter water heeft een massa van 1 kg; **B** ongeveer $(1 + 1 + 0{,}5) \times 1\,000 : 35$; **H** $1\,000 : 35 \approx 30$.

3 Finale

1. **V** 1 minuut = 60 seconden; **B** $1\text{h}21'03'' - 1\text{h}20'09'' - 0'16''$.

2. **V** 1 uur = 60 minuten; **B** $((480 : 8) : 60) : (4 : 4)$; **X** dit is een bekend soort probleem, dat garant staat voor verwarring; het vereiste aantal autocontrole's per minuut = $(480 : 8) : 60 = 1$; toevalligerwijs is dat ook het gegeven werktempo van de 4 parkeerwachters: $4 : 4$; **G** als p parkeerwachters in m minuten a auto's controleren, hoeveel parkeerwachters zijn dan nodig om in u uur b auto's te controleren? dat aantal is $((b : u) : 60) : (a : m)$.

3. **V** oppervlakte van een rechthoek is lengte keer breedte; een rechthoek met gegeven omtrek en maximale oppervlakte is een vierkant; **B** $(20 : 4)^2 = (20 : 4) \times (20 : 4)$; **X** dit vergt "meetkundige" kennis; **G** i.h.a. geldt de ongelijkheid $\ell \times (s - \ell) \leq (s : 2)^2$, waarbij s de halve omtrek (semiperimeter) is en ℓ de lengte (dus $s - \ell$ is de breedte); gelijkheid geldt alleen als $\ell = s : 2$; redenering: $0 \leq (s : 2 - \ell)^2 = (s : 2)^2 - s\ell + \ell^2 = (s : 2)^2 - \ell \times (s - \ell)$.

4. **B** ?; **X** dit vergt ruimtelijk inzicht; een snijvlak heeft met elk zijvlak hooguit één snijlijn, dus de snijfiguur heeft maximaal 6 zijden (het aantal zijvlakken van een kubus), en daarmee ook maximaal 6 hoekpunten (met dank aan de wiskundemeisjes); dit aantal is ook haalbaar (kijk in de richting van een lichaamsdiagonaal tegen de kubus aan en je ziet een zeshoek).

5. **V** $1\% = 1/100$; **B** $3{,}60 : (1 - 40 : 100) = 3{,}60 : 0{,}6$; **X** het is niet goed om 40% bij 3,60 te doen (zie ook som 10 (muffins). N.B. Als dit werkelijke waardes zijn (of waren), dan zou men het gewoon kunnen weten.

6. **B** $6/15 - 6/16$; **H** $6 \times (1/15 - 1/16) = 6 \times (16 - 15)/(16 \times 15) = 2 \times 3/(2 \times 8 \times 3 \times 5) = 1/(8 \times 5) = 1/40$; **G** $1/a - 1/b = (b - a)/(a \times b)$, i.h.b. $1/n - 1/(n + 1) = 1/(n(n + 1))$.

7. **B** $2 : 9 \bmod 10$, d.w.z. a met $(a \times 9) : 10$ geeft rest 2, ofwel, welk veelvoud van 9 eindigt op een 2; **H** in de tafel van 9 lopen de laatste cijfers van de resultaten af van 9 naar 0.

8. **B** 99×99; **H** $(100 - 1) \times (100 - 1) = 100^2 - 2 \times 100 \times 1 + 1^2 = 10\,000 - 200 + 1$; **G** $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

9. **V** 1 dag = 24 uur; **B** $4 \times (1 + 2 + 3 + \cdots + 12)$; **H** $1 + 2 + 3 + \cdots + 12 = 12 \times 13 : 2$; **X** let op dat een etmaal twee keer 12 uur bevat; let er verder op dat deze Dom (blijkbaar) op het halve uur even vaak slaat als op het hele uur (en dus niet maar één keer).

4 Slotwoord

Het is een zeer diverse collectie sommen, zowel qua formuleringen als qua achterliggende berekeningen. De presentatie op TV was bovendien verlucht met mooie toepasselijke videoclips. De benodigde voorkennis is minimaal:

- gehele getallen, kommagetallen, breuken;
- optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen (met en zonder rest);
- vergelijken in grootte,schatten, procenten, worteltrekken, gemiddelde;
- weetjes m.b.t. tijd(sduur): omrekenen van jaren in dagen, maand in dagen, dagen in uren, uren in minuten, minuten in seconden;
- omzetten van eenheden: kilo, kg, g, m, cm, mm, m^3 in liter;
- hanteren van valuta en snelheid.

Bij veel sommen is het bepalen van wat er berekend moet worden lastiger dan het uitvoeren van de berekening zelf. Dat is misschien een keuze geweest, maar wat mij betreft hadden er meer "zuivere" rekensommen bij gemoeten. Desnoods met verhaaltje vooraf, maar waarbij dan de abstracte som expliciet wordt gegeven.

Een aantal "sommen" draait niet (alleen) om rekenen, maar in belangrijke mate (ook) om (ruimte-)meetkunde, te weten eindronde 17 en finale 3 en 4. Dat is uitermate twijfelachtig. Ook eindronde 4, 7, 12, 13, 16 en 21 hebben een meetkundig aspect. Dat aantal vind ik aan de hoge kant.

Bovendien zaten er een paar "instinkers" bij, d.w.z. de berekening zelf is niet moeilijk, maar het bepalen van wat er berekend moet worden kan makkelijk fout gedaan worden. In minder mate betreft dit eindronde 4, 7, 9, 12 en finale 9, maar zeker eindronde 16 is een — overigens bekende — instinker. En ook finale 2 is twijfelachtig als toets van rekenvaardigheid. Persoonlijk vind ik dit te veel, zeker voor een evenement als dit. Het karakter van een *reken*toets wordt hierdoor aangetast en het stigmatiseert — nodeloos — het rekenen als vaardigheid.

Men heeft negatieve getallen vermeden, evenals machtsverheffen. Daar kan ik me wel in vinden. Ook spelen logica, verzamelingenleer en combinatoriek (gelukkig) geen serieuze rol.

Volkskrant en NPS bleken geen statistieken m.b.t. de prestaties van de deelnemers te kunnen leveren. TV-programma's maken is een vluchtig proces.

Ik heb ook niet kunnen achterhalen welke doelstellingen het FI gehanteerd heeft bij het samenstellen van de sommenbundel.

A Statistieken

De tabellen 2, 3 en 4 inventariseren welke aspecten in welke sommen vóórkomen. Tabel 1 verklaart de gebruikte symbolen.

Symbool	**Betekenis**
#	volgnummer van som
$\mathbb{N}$	niet-negatieve gehele (natuurlijke) getallen
$\mathbb{D}$	kommagetallen (decimale breuken)
$\mathbb{Q}$	breuken (quotiënten)
$\pm$	optellen en aftrekken
$\times$	vermenigvuldigen
:	delen (zonder rest, eventueel met komma)
m	delen met rest (modulair rekenen)
%	procenten
$<$	vergelijken in grootte
$\approx$	schatten (benaderend rekenen)
e	eenheidconversies
t	tijd(conversie)
€	rekenen met geld (valuta)
z	zuiver rekenen
$\square$	meetkunde
a	modelleren en abstraheren
$\mathbb{P}$	waarschijnlijkheid (probabiliteit)
$\overline{x}$	gemiddelde ($\overline{x} = (x_1 + \cdots + x_n) : n$)
$\sqrt{}$	worteltrekken ($\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$)
x	algebra
?	(zoek)algoritme
†	geen rekenen

Tabel 1: Legenda

#	$\mathbb{N}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\pm$	$\times$	:	m	%	$<$	$\approx$	e	t	€	z	$\square$	a	extra
1	•			•		•		•								•	
2	•					•				•						•	$\mathbb{P}$

Tabel 2: Welke aspecten komen voor in welke proefsommen

#	ℕ	𝔻	ℚ	±	×	:	m	%	<	≈	e	t	€	z	□	a	extra
1	●						●							●			
2		●				●					●		●			●	
3	●			●												●	?
4	●	●		●	●	●					●				●	●	
5		●			●					●				●			
6	●			●			●		●			●				●	
7	●			●	●	●									●	●	
8	●	●			●				●		●					●	
9	●			●					●	○		●				●	
10	●	●		●	●			●	●							●	x
11		●		●		○				●			●			●	
12	●			●											●	●	$\surd$
13	●			●											●	●	
14	●					●					●					●	
15	●	●		●	●								●			●	?
16	●	●		●		○									●	●	
17															●	●	†
18			●						●					●			
19	●		●	●		●						●				●	
20	●		●	●		●				●		●				●	$\overline{x}$
21	●				●						●				●	●	
22	●			●		●				○	●					●	
Σ	17	8	3	14	7	9	2	1	6	5	6	4	3	3	7	19	6

Tabel 3: Welke aspecten komen voor in welke eindrondesommen

#	ℕ	𝔻	ℚ	±	×	:	m	%	<	≈	e	t	€	z	□	a	extra
1	●			●								●				●	
2	●					●										●	
3	●				●	●									●	●	
4	●														●	●	†
5		●		●		●		●					●			●	
6			●	●										●			
7	●						●							●		○	
8	●				●									●			
9	●			●	○							●				●	
Σ	7	1	1	4	3	3	1	1	0	0	0	2	1	3	2	7	1

Tabel 4: Welke aspecten komen voor in welke finalesommen