# Wiskunde achter de kunst van Koos Verhoeff

Tom Verhoeff, TUE
wstomv@win.tue.nl

September 1998
Verschenen in *De Waaier 3, 1998*,
blad van WIRE, alumnivereniging van Eindhovense wiskundigen

## Wiskundigen en niet-wiskundigen

Op de bibliotheek bij de Faculteit Wiskunde en Informatica van de TUE exposeerde Koos Verhoeff onlangs een aantal van zijn 'wiskunstige' objecten (zie ook [1] voor een virtueel bezoek). In dit artikel wil ik een van de wiskundige uitdagingen achter mijn vaders werk nader belichten (zie ook [2]).

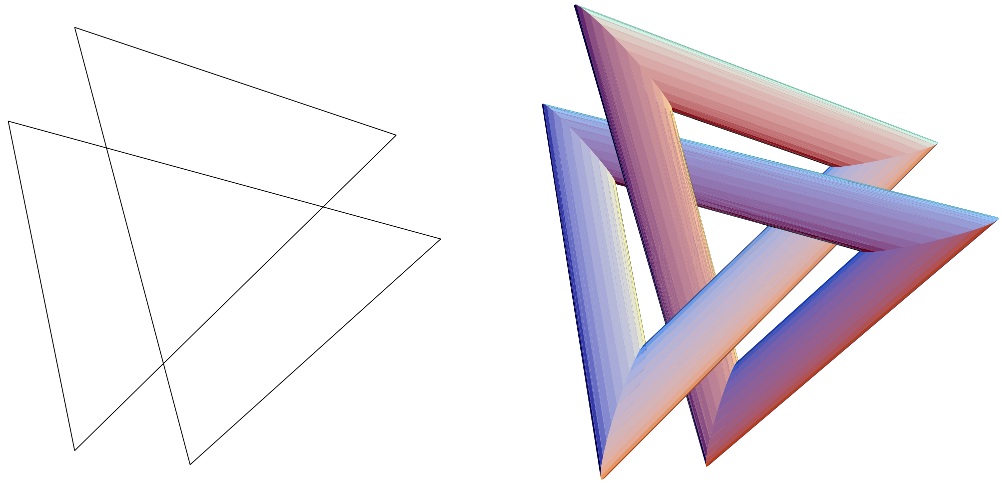
De kunst van Koos oogst gelijkelijk waardering bij wiskundigen en niet-wiskundigen, om de mensheid maar eens in twee groepen te verdelen. Ik kan natuurlijk niet uitleggen waarom zijn objecten mooi gevonden worden, maar dat zit vermoedelijk niet (alleen) in het wiskundige karakter. Materiaalkeuze, afwerking, omvang en verhouding hebben daarop vast een grotere invloed. Wel herkent iedereen er iets wiskundigs in: rechte lijnen en regelmaat, driehoeken en andere polygonen, af en toe een cirkel of boog. Toch is dat slechts het oppervlakkige deel van de wiskunde die een rol speelt. Voor het ontstaan van de objecten is juist de wiskunde die je niet direct ziet het belangrijkst. De kunst is dat niet te laten merken, ook niet aan de wiskundigen.

Ik hoop dat dit artikel de lezers aanzet tot eigen onderzoek, aangezien er nog een **onopgelost probleem** tussen zit.

## Lijnstukken opblazen

Zij $\ell$ een gesloten één-dimensionale kromme in $\mathbb{R}^3$ met eindige lengte. Geen fractaal dus, al mag u gerust aannemen dat $\ell$ een mooie kromme is. Zo'n kromme is oneindig dun en daarom wat lastig te realiseren. Mensen met een bouwdrang (kunstenaars :-) zoeken dus naar manieren om de kromme te 'verdikken'.

We beschouwen eerst het geval dat $\ell$ een polygoon is, d.w.z. een eindige aaneenschakeling van lijnstukken. De geknoopte zeshoek met zesvoudige symmetrie links in figuur 1 dient als voorbeeld. **Opgave**: Toon aan dat met minder dan zes lijnstukken geen knoop te maken is.



Figuur 1: Polygoonknoop met zes zijden (links) en verdikt (rechts)

Een ‘flauwe’ verdikking krijg je door de lijnstukken op te blazen tot **cirkelcilinders** met diameter $d$. Je moet dan wel even oppassen bij de knikpunten. Door de cilinders schuin af te zagen langs het bissectrice-vlak (preciezer: het *binnen*-bissectrice-vlak) van de knik ontstaat een ellipsvormige zaagsnede. De cilinders van twee aangrenzende poten passen netjes op elkaar bij die ellipsen (zie rechts in figuur 1).

# Vlak en ruimtelijk verstek

Het schuin afzagen van cilinders heet **verstekken**. Men kan dat in een zogenaamde verstekbak doen. De cilinder ligt er horizontaal in vastgeklemd. De zaag staat er loodrecht op en kan draaien om een vertikale as voor het instellen van de verstekhoek $\alpha$ tussen zaag en hartlijn. De hoek bij de knik is dan $2\alpha$. Oorspronkelijk werd de term ‘verstek’ alleen gebezigd bij haakse knikken met $\alpha = 45^\circ$. Het klassieke **schilderijlijstje** is daarvan een voorbeeld.

De cilinder kan in de verstekbak nog geroteerd worden om zijn hartlijn. Vanwege de volledige rotatie-symmetrie van de cirkel, is deze rotatie bij het verstekken van het eerste uiteinde van cirkel-cilinders irrelevant. Alvorens het tweede uiteinde te verstekken dient de cilinder over de juiste hoek $\beta$ verdraaid te worden.

Beschouw een lijnstuk om te verdikken. Het grenst aan twee knikken, die ieder een vlak opspannen. De hoek tussen deze vlakken is de gezochte rotatiehoek $\beta$.

In het geval $\beta = 0$ spreken we van **vlak verstek** en voor $0 < \beta < 180^\circ$ van **ruimtelijk verstek**. Bij vlak verstek kan de cilinder in dezelfde stand in de verstekbak blijven vastgeklemd. Bij ruimtelijk verstek moet de cilinder vóór de tweede keer zagen over $\beta$ gedraaid worden. In de praktijk is dit bij cirkel-cilinders lastig, omdat er vanwege de rondheid geen goed referentiekader is.

Let wel dat in mijn definities van vlak en ruimtelijk verstek de zaagsnedes aan *beide* uiteinden een rol spelen. Sommige auteurs onderscheiden (ten onrechte) vlak en ruimtelijk verstek met betrekking tot één zaagsnede. Dit misverstand is als volgt te verklaren. In plaats van de cilinder te roteren om zijn hartlijn, kan ook de zaag uit 't lood gekanteld worden. Men noemt dit wel **dubbel verstek**, in tegenstelling tot **enkel verstek** waarbij de zaag rechtop blijft en maar één vrijheidsgraad heeft. Of met dubbel verstek een ruimtelijke kromme ontstaat hangt echter mede af van wat er bij het andere uiteinde gebeurt. Enkel en dubbel verstek zeggen iets over de werkwijze, maar niets over het effect m.b.t. vlak of ruimtelijk.

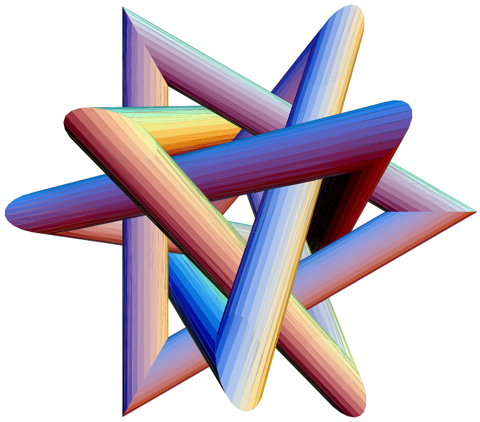
# Hoe ver kun je gaan?

Met verstek kun je ervoor zorgen dat de cilinders van aangrenzende lijnstukken netjes aansluiten. Een andere zorg bij opblazen is dat cilinders van lijnstukken die *niet* in een knikpunt bij elkaar komen, niet overlappen. Er is **overlap** als hun afstand minder is dan de diameter $d$. Een remedie daarvoor is je tijdig in te houden bij het opblazen. Maximaal opblazen kan mooi zijn, al is het soms bewerkelijk om te bepalen wat de maximum diameter is, gegeven een beschrijving van de kromme.

Maximaal opgeblazen cirkel-cilinders spelen bijvoorbeeld een rol in het '**rioolmonument**' (zie figuur 2), dat is opgebouwd uit een viertal symmetrisch door elkaar gevlochten gelijkbenige driehoeken. Het is, gemaakt van rioolpijp-restanten, op imposante schaal te bezichtigen in de tuin van de familie Verhoeff. **Opgave**: Bepaal de verhouding tussen de hartlijn-lengte en de diameter van de cilinders in het rioolmonument.

# Polygonen als profiel

Wie cirkel-profielen te saai of te lastig vindt, kiest andere vormen, zoals vierkanten, rechthoeken, ruiten, parallellogrammen, driehoeken, etc. Deze profielen werken bijna net zo als cirkels. Het verschil zit 'm bij de knikken: het is wel zo mooi als daar de **naden aansluiten**.



Figuur 2: Het rioolmonument uit vier gelijkzijdige driehoeken

Beschouw eerst een cilinder met **vierkant profiel**, d.w.z. met een vierkante zaagsnede bij *haaks* doorzagen. Bij *schuin* doorzagen in een verstekbak ontstaat i.h.a. een zaagsnede in de vorm van een **parallellogram**: overliggende zijdes blijven parallel ondanks al het gedraai. In het bijzondere geval dat de balk met één zijde vlak onder in de bak ligt, ontstaat met enkel verstek een rechthoekige zaagsnede. Een parallellogram heeft, net als een ellips, twee rotatie-symmetrieën. Derhalve passen de twee verkregen delen op twee manieren zó aan elkaar bij die zaagsnede dat de naden dóórlopen. Bij de eerste manier liggen de delen in elkaars verlengde, zoals het was vóór ’t zagen. De tweede manier is door één poot over $180^\circ$ te draaien om de middelloodlijn van het parallellogram. In dit geval ontstaat in de cilinder een knik, waarvan het bissectrice-vlak de zaagsnede bevat.

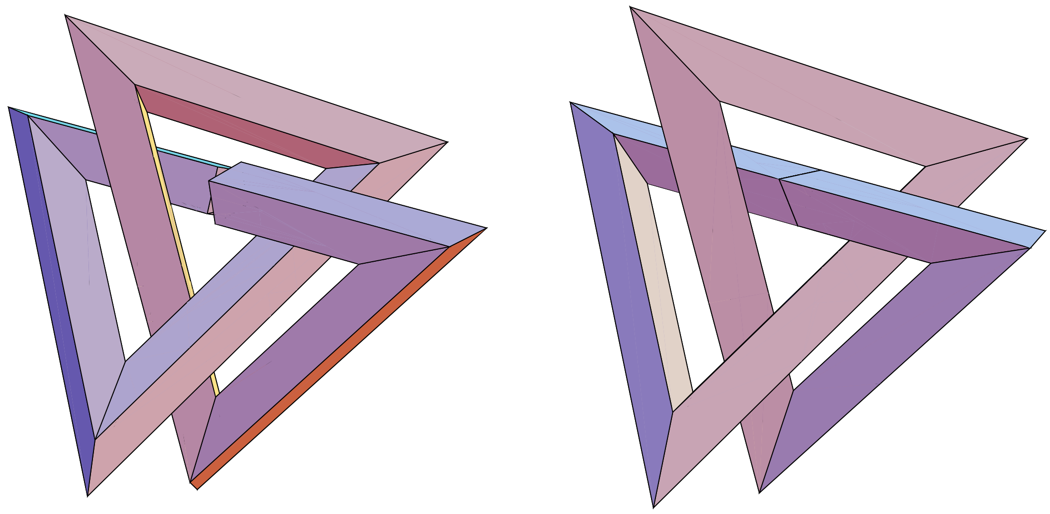
Ook andere profielvormen zijn bruikbaar; daarover later meer. Een praktisch voordeel van een polygoon als profiel, is dat bij verstekken de rotatie ($\beta$) om de hartlijn beter is in te stellen. Idealiter ligt de balk met één zijde vlak in de verstekbak. Bij vierkant profiel zijn er dan twee rotaties relevant ($\beta = 0$ en $\beta = 90^\circ$). Een nadeel van polygonen als profiel is dat overlap van niet-aangrenzende cilinders lastiger te bepalen is, omdat niet alleen de dikte een rol speelt maar ook de rotatie.

## Verrassende verdraaiing

Door geschikt verstekken lijkt ieder ruimtelijk polygoon te verdikken tot vierkante cilinders. Maar nu komt de aardigheid, of eigenlijk de onaangename verrassing. We nemen onze gesloten kromme $\ell$ en een niet te dikke balk met vierkant profiel.

Kies een lijnstuk om mee te beginnen. Blaas een *helft* ervan op tot de gegeven vierkante cilinder. Zaag nu de balk bij het knikpunt langs het bissectrice-vlak door. Daarmee ligt dan ook de verdikking van het opvolgende lijnstuk vast. Precies bepalen wat $\alpha$ en $\beta$ zijn (en het dan ook nog secuur uitvoeren met de zaag) is een kwestie van vakmanschap.

Echter ... als we de hele kromme rond zijn en na de laatste knik de resterende helft van het start-lijnstuk verdikken, dan blijkt i.h.a. dat het niet netjes uitkomt. Overal lopen de vier naden van de balken precies door, *behalve* mogelijk in het midden van het start-lijnstuk. Daar zit 't eventueel verdraaid: **het verstek sluit niet** (zie links in figuur 3). Dit ruimtelijk verstek kan overigens ook met andere profielvormen. Rechts in figuur 3 is dezelfde kromme met driehoekig profiel verstekt en dat komt wel uit.



Figuur 3: Vierkant profiel (links) en driehoekig profiel (rechts)

In het midden van het start-lijnstuk ontmoeten de twee uiteinden van de verstekte wandeling langs de kromme elkaar. De beide zaagsneden in het midden zijn congruente profielen, die verdraaid kunnen liggen ten opzichte van elkaar. Het sluit pas mooi als de verdraaiing past bij de rotatie-symmetrieën van het profiel, maar dat gebeurt niet altijd. Het blijkt dat de **mate van verdraaiing** *on*afhankelijk is van ($i$) het lijnstuk waarmee begonnen wordt, ($ii$) hoe het eerste balkdeel om zijn hartlijn geroteerd ligt en ($iii$) het profiel van de balk. De wiskundige uitdaging is om, gegeven de kromme, de mate van verdraaiing (ook **torsie** genoemd) te bepalen. Welke meetkundige berekening is daar voor nodig?

Toen mijn vader met dit sluitprobleem werd geconfronteerd door beeldend kunstenaar Popke Bakker, was dat iets nieuws voor hem. Het bleek overigens dat dit probleem ook bij bekende meetkundigen onbekend was. Kunt u dit probleem wel traceren in de literatuur, dan houden we ons aanbevolen.

Het berekenen van de torsie is zeker niet zo triviaal als het bepalen van een uitproduct (mijn vader was niet de eerste wiskundige bij wie Popke Bakker met zijn vraag aanklopte). De berekening is als volgt beter te begrijpen. Verdik de kromme eerst tot een cirkel-cilinder; deze sluit altijd netjes. Teken vervolgens een lijn ('ruggegraat') erop, die parallel aan de kromme over de cilinders rondwandelt. Na één rondgang is door vergelijken van begin- en eindpunt van de ruggegraat af te lezen hoeveel torsie er is opgetreden.

## Inverse problemen

Bij een gegeven kromme $\ell$ ligt vast wat de verdraaiing is als je hem tot een verstekte balk wilt verdikken. Die verdraaiing moet passen bij de rotatie-symmetrieën van het balkprofiel, wil het verstek netjes sluiten. De kunstenaar wordt dus soms gedwongen de kromme (of het profiel) aan te passen om het verstek te laten sluiten. De vraag rijst dan hoe een gegeven kromme een 'beetje' veranderd kan worden, zó dat het verstek sluit? En liefst **met behoud van schoonheid**. Dit inverse probleem is moeilijker dan de verdraaiing berekenen, omdat er zoveel vrijheidsgraden zijn om een kromme te veranderen. Ook hiervoor heeft Koos computerprogramma's geschreven, al bleek het wat lastig schoonheid te vangen in een algoritme.

Een andere omkering van het spel verkrijg je wanneer uit een balk door verstekken een beperkte collectie stukjes is gemaakt. De vraag rijst dan welke krommen je ermee kan bouwen. Dit geeft aardige combinatorische problemen. Beschouw bijvoorbeeld een vierkante balk waarvan stukjes worden gezaagd met een vaste lengte (langs de hartlijn). Er zijn met verstek over $\alpha = 45^\circ$ en de balk vlak in de bak (d.w.z. met rechthoekige zaagsnede), slechts vier verschillende stukjes te maken. Immers het tweede verstek kan vier standen aannemen t.o.v. het eerste. **Opgave**: Bepaal de gesloten krommen die met $N$ van zulke stukjes te maken zijn.

## Continu generaliseren

Met wat fantasie is dit alles te generaliseren. Mijn vader ligt daar nog ver voor op mij en het einde is nog niet in zicht. Ik wil tot slot, zonder gedetailleerde uitleg, een paar van de generalisaties noemen die zijn terug te vinden in zijn werk.

Je kan een balk met dusdanig rechthoekig profiel nemen dat verstekken over $\alpha = 45^\circ$ een *vierkante* zaagsnede geeft. (**Opgave**: Bepaal de aspect-ratio van deze rechthoek.) Dit verstek kan dan op vier manieren passend op zichzelf aangesloten worden, waarvan één rechtdoor, één onder een rechte hoek en verrassend genoeg twee onder een hoek van 120$^\circ$ (ga na). In dat laatste geval ligt de zaagsnede niet meer in het bissectrice-vlak van de hoek. Mijn vader noemt dit **dwarsverstek**.

Je hoeft ook niet ieder lijnstuk tot precies hetzelfde profiel te verdikken. Een extra uitdaging doet zich voor bij figuren waarin drie of meer lijnstukken bij elkaar komen. Bij het volgen van een kromme door er een strip langs te vouwen, spelen de *buiten*-bissectrice-vlakken van de knikken een rol.

Tenslotte zijn er de **continue krommen**. Ook hierbij is er sprake van verdraaiing, zoals een **eenvoudig experiment** leert. Neem een stofzuigerslang of een flexibele electriciteitspijp. Deze heeft de eigenschap wel *dwars* op de hartlijn te kunnen buigen, maar niet te willen vervormen bij rotatie om de hartlijn. Dat wil zeggen als je één uiteinde tordeert over een zekere hoek, dan tordeert de hele slang, inclusief het andere uiteinde, over diezelfde hoek. Leg nu de slang in een vlakke cirkel op de grond en zet over de verbinding tussen beide uiteinden een streepje (je kan ook de hele 'ruggegraat' erop tekenen). Als de slang een gesloten kromme volgt, dan is aan die streepjes te zien hoeveel verdraaiing er optreedt. Bij een vlakke kromme is dat nul, maar bij een ruimtelijke kromme i.h.a. niet. Je kan ook de cirkel oppakken met in iedere hand een uiteinde en die uiteinden ten opzichte van elkaar verdraaien. De cirkel vervormt zich dan tot een wilde ruimtelijke kromme. Bij een gesloten continue kromme is er dus weer sprake van een mate van verdraaiing tussen begin en einde. **Open probleem**: Is dit juist en, zo ja, hoe bereken je de verdraaiing?

Dingen die altijd lukken zijn geen kunst. Vandaar dat de kunstenaar zichzelf beperkingen oplegt. Soms zijn die beperkingen in het oog springend (rijmschema's) soms niet (sluitend verstek).

## Referenties

[1] Tom Verhoeff. *Koos Verhoeff exposeert in Bibliotheek Wiskunde & Informatica.* `http://www.win.tue.nl/~wstomv/math-art/expositie.html`

[2] Bruno Ernst. *Wiskunstige schoonheid.* AO-reeks nr. 2438, 23 okt. 1992. Stichting IVIO. (`ZHW 92 ERN` in de Factulteitsbibliotheek Wiskunde & Informatica van de TUE)

De illustraties werden verzorgd door Koos Verhoeff met behulp van Mathematica en PostScript.