Verschillende soorten onzekerheid spelen een rol bij schaken, poker, Yahtzee en nog veel meer spelen. Toch kun je die onzekerheid voor een groot deel uitsluiten als er veel potjes gespeeld worden. Verrassend is wel, dat toeval dan toch nodig kan zijn voor een zo goed mogelijke strategie. En soms is het belangrijker dat je een redelijk voorspelbaar resultaat behaalt, dan een op de lange termijn optimaal resultaat.

■ door Tom Verhoeff

SPELEN MET VARIANTIE

Figuur 1 Classificatie van spelen naar bron van onzekerheid

Spelletjes hebben een grote aantrekkingskracht, zeker op wiskundigen. Goedgedefinieerde regels nodigen uit tot formele analyse, soms met verrassende resultaten. Jörg Bewersdorff schreef een aanbevelenswaardig boek over de toepassing van wiskunde bij het analyseren van spelen: *Mit Glück, Logik und Bluff: Mathematik im Spiel – Methoden, Ergebnisse und Grenzen* (in het Engels vertaald onder de titel *Luck, Logic, and White Lies: The Mathematics of Games*). Bewersdorff deelt spelen in naar de bronnen van onzekerheid waarmee de spelers te maken krijgen, zie figuur 1.

Bij *combinatorische spelen* beschikken alle spelers over volledige informatie. Denk aan boter-kaas-en-eieren, schaken en het Oosterse bordspel go. De onzekerheid onstaat hier door het grote aantal manieren waarop zetten gecombineerd kunnen worden. Daardoor is het niet eenvoudig om goede keuzes te maken, ook al weet je alles. Voor dit soort spelen is wat algemene wiskundige theorie, maar elk spel is toch weer anders.

Bij *kansspelen* komt de onzekerheid door een *stochastisch element*, zoals werpen van dobbelstenen en schudden van kaarten. In tegenstelling tot combinatorische spelen gaat het hier om fundamentele onwetendheid: je kunt niet voorspellen hoe een dobbelsteen valt. Bij vaker werpen valt er echter wel iets over te zeggen, omdat de dobbelsteen geen boosaardige tegenstander is maar een neutraal ding. De basis voor het wiskundige vakgebied van de *kansrekening* werd in de zeventiende eeuw gelegd, toen men kansspelen systematisch ging analyseren.

Bij *strategische spelen* hebben spelers geheimen voor elkaar. Denk aan steen-papier-schaar, waarbij beide spelers gelijktijdig een object kiezen zonder de keuze van de ander te kennen. De onzekerheid ontstaat dus door geheimen van de tegenspeler(s). In tegenstelling tot dobbelstenen werken de tegenspelers wel opzettelijk tegen. Het wiskundige vakgebied van de *speltheorie* houdt zich met dit soort spelen bezig. Er is geen Nobelprijs voor Wiskunde, maar wiskundigen hebben verscheidene Nobelprijzen voor Economie in de wacht gesleept met hun werk aan de speltheorie, die een belangrijke rol vervult in economische modellen.

Veel spelen vallen niet in één klasse, maar zijn een mengsel. Zo zitten in het kaartspel poker alle drie de vormen van onzekerheid: kaarten worden geschud (geluk), spelers kennen de kaarten en keuzes van de tegenspelers niet (geheimen) en keuzes kunnen op veel manieren gecombineerd worden (logica). Poker is dan ook een erg moeilijk spel, zeker om het wiskundig te analyseren.

Een spel wordt gespeeld door een of meer spelers die 'zetten' doen om zo het doel van het spel te bereiken. De regels bepalen wanneer spelers mogen zetten, welke opties ze hebben en wat het doel is. Dat doel kan gewoon zijn om te winnen (binaire uitkomst) of om een opbrengst te maximaliseren (discrete of continue uitkomst).

		Bob kiest 0	Bob kiest 1
Alice kiest	0	↑1	←2
	1	←2	↑3

Figuur 2 Uitbetalingstabel voor een muntspel

Wiskundig interessante vragen zijn: Gegeven de speltoestand, hoe bepaal je de beste zet? Welke speler kan de beste uitkomst afdwingen vanuit de begintoestand? Wat is de optimale uitkomst, eventueel op langere termijn?

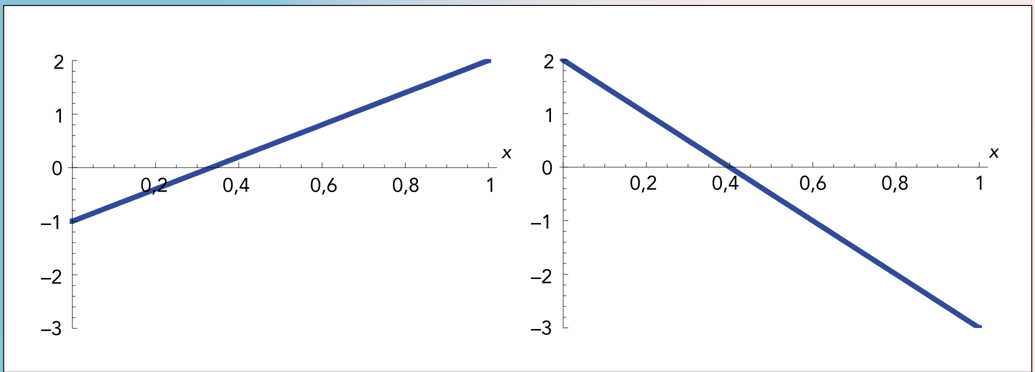
EEN STRATEGISCH MUNTSPEL We analyseren een eenvoudig muntspel wat uitgebreider. De twee spelers Alice en Bob kiezen gelijktijdig elk 0 (kop) of 1 (munt) door, onzichtbaar voor de ander, een munt onder hun hand neer te leggen (de Faculteit Wiskunde & Informatica van de TU/e heeft zulke binaire munten uitgegeven). Na hun keuzes vastgelegd te hebben, laten ze deze aan elkaar zien en wordt de uitbetaling bepaald met de tabel in figuur 2.

Alice ontvangt € 2 van Bob wanneer hun keuzes verschillen. Wanneer beiden 0 gekozen hebben, ontvangt Bob € 1 van Alice; met beiden 1 ontvangt hij € 3. Dit is een zogenaamd *nulsom spel*, omdat de winst van de ene speler gelijk is aan het verlies van de ander. Het doel is om de totale opbrengst te maximaliseren bij herhaald spelen.

Met een gemiddelde opbrengst per beurt van $(-1 + 2 + 2 - 3)/4 = 0$ lijkt dit een eerlijk spel. Maar schijn bedriegt. Welke speler zou je het liefst zijn? Dat ligt niet meteen voor de hand.

Alice kan Bob verschalken met een *toevalsstrategie*, die ervoor zorgt dat Bob haar niet kan uitbuiten en dat ze gemiddeld het net iets beter doet. De analyse verloopt als volgt. Stel Alice kiest 1 met kans x, waarbij ze x nog slim kan bepalen. Met $x = 0,5$ is haar verwachte opbrengst per beurt $(-1 + 2)/2 = +0,5$ als Bob 0 kiest en $(2 - 3)/2 = -0,5$ als hij 1 kiest. Als Bob weet dat Alice $x = 0,5$ hanteert, zal hij altijd 1 kiezen en zo toch flink aan Alice verdienen.

Alice kan voor elke x haar verwachte opbrengst als volgt bepalen. Als Bob 0 kiest, dan heeft ze een opbrengst van € 2 met kans x (wanneer haar keuze 1 blijkt te zijn) en een verlies van € 1 met kans $1 - x$ (wanneer haar keuze 0 blijkt te zijn). In dit geval is dus de verwachte opbrengst $x \times 2 + (1 - x) \times -1 = 3x - 1$ (in €). Dit is een rechte lijn tussen -1 (voor



Figuur 3 Verwachte opbrengst voor Alice als ze 1 kiest met kans x en Bob 0 kiest (links) of 1 (rechts)

$x = 0$) en 2 (voor $x = 1$), zie de linkergrafiek in figuur 3.

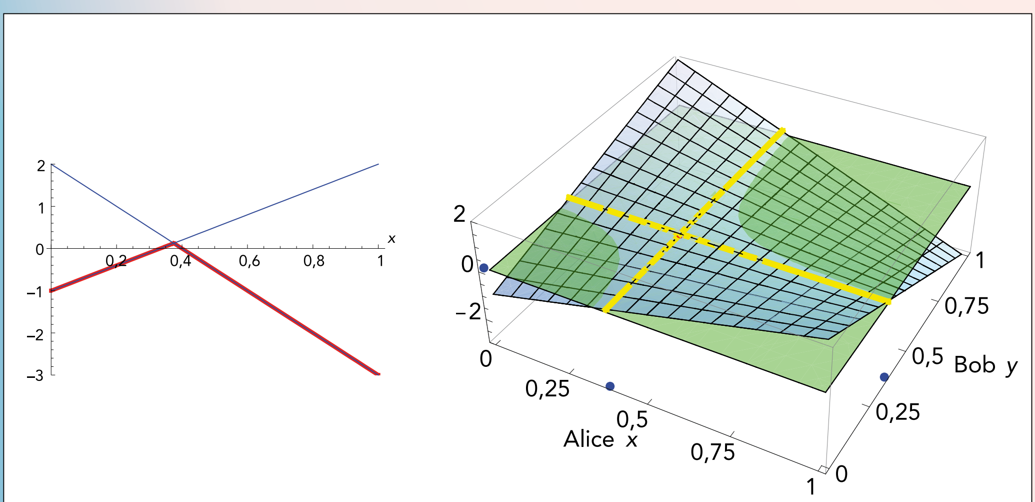
Als Bob 1 kiest, dan is het verlies € 3 met kans x en de opbrengst € 2 met kans $1 - x$. Dat komt neer op een verwachte opbrengst van $x \times -3 + (1 - x) \times 2 = -5x + 2$, de rechte lijn tussen 2 en –3.

Alice weet natuurlijk niet wat Bob doet. Rekening houdend met het ergste neemt ze aan dat Bob haar x kent en hij zelf zijn keuze zo maakt dat hij er het meeste aan over houdt en Alice dus het minste. Bob kent natuurlijk de keuze van Alice niet, vanwege haar toevalsstrategie (tenzij $x = 0$ of $x = 1$), maar hij kan natuurlijk ook de grafieken maken en zijn opbrengst maximaliseren door die van Alice te minimaliseren. Dit is te zien in figuur 4, waar de rode grafiek links het beste is voor Bob. Gelukkig voor Alice is er een klein hoekje met een positieve opbrengst, die piekt op $x = 3/8$. Haar verwachte winst is dan $1/8 = 0{,}125$, ofwel 6,25% van de gemiddelde inzet van € 2 per beurt (niet gek deze dagen).

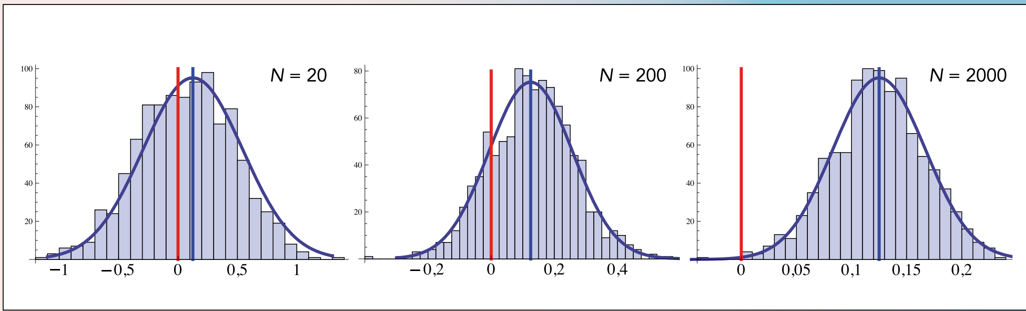
Het is aardig om op te merken dat met de keuze $x = 3/8$ de verwachte opbrengst van Alice onafhankelijk is geworden van wat Bob doet, zelfs als hij ook een toevalsstrategie toepast. Beide grafieken snijden elkaar immers bij $x = 3/8$. Deze optimale toevalsstrategie van Alice is immuun voor Bobs keuze.

De rechtergrafiek in figuur 4 toont de verwachte opbrengst als beide spelers elk een eigen toevalsstrategie hanteren. Bij het optimum voor Alice op $x = 3/8$ is de grafiek vlak en net zo voor Bobs optimum (de gele lijnen). Dit zogenaamde *Nash-evenwicht* is immuun voor de strategie van de ander. Als spelers drie of meer opties hebben om uit te kiezen, dan wordt het lastiger optimale strategieën te bepalen. John Nash bewees dat zulke optimale strategieen altijd bestaan, zelfs voor niet-nulsom spelen.

Dit is allemaal mooi en aardig, en kan zelfs



Figuur 4 Verwachte opbrengst voor Alice als ze 1 kiest met kans x en Bob zijn keuze optimaliseert (onderste grafiek in rood, links); of 1 kiest met kans y (rechts)



Figuur 5 Verdeling van de 'opbrengst na een reeks van *N* beurten' als Alice en Bob optimale toevalsstrategieën toepassen, op basis van 1000 gesimuleerde reeksen; de blauwe lijn markeert 0,125 (de verwachting), de rode lijn markeert 0. Merk op dat de horizontale schaal in de drie grafiekjes telkens anders is.

praktische waarde hebben. Maar er zit nog een adder onder het gras. Als ze dit spel 20 beurten spelen (beide spelers gebruiken een optimale toevalsstrategie), dan is de gemiddelde verwachte opbrengst per spel voor Alice inderdaad $\mu = 0{,}125$. Maar de spreiding (standaarddeviatie) is overweldigend: $\sigma = 0{,}42$. Zie figuur 5 (links), waaruit blijkt dat in ruwweg 38% van de reeksen van 20 beurten Alice toch negatief eindigt (links van de verticale rode lijn).

Met reeksen van 200 beurten neemt de standaarddeviatie af met een factor $\sqrt{10}$ tot $\sigma = 0{,}13$. Zie figuur 5 (midden), waar Alice nog altijd in 17% van de reeksen in de min eindigt. Pas bij reeksen van 2000 beurten neemt de standaarddeviatie af tot $\sigma = 0{,}04$ en eindigt nog maar 0,1% van de reeksen negatief voor Alice. Als ze maar één beurt per werkdag spelen, is Alice pas na zo'n 10 jaar redelijk zeker van haar winst.

Zoals al eerder opgemerkt, kan Bob niets aan die verwachte winst van Alice doen, als zij gebruik maakt van de optimale toevalsstrategie. Het is echter eenvoudig in te zien dat Bob wel de spreiding kan beïnvloeden. Als hij bijvoorbeeld altijd 1 kiest (in plaats van volgens zijn eigen optimale toevalsstrategie), dan gaat de standaarddeviatie bij reeksen van 20 beurten omhoog van $\sigma = 0{,}42$ naar $\sigma = 0{,}54$. In dat geval moet Alice meer dan 3000 beurten spelen (15 jaar met één beurt per werkdag) om 99,9% zeker te zijn van haar winst. Uiteraard kan ze er dan ook voor kiezen om af te wijken van de optimale toevalsstrategie en altijd 0 kiezen. Maar Bob gaat er dan misschien ook weer anders over denken. Al met al een subtiel spel.

SOLITAIRE YAHTZEE: EEN KANSSPEL

Een voorbeeld van een puur kansspel is solitaire Yahtzee, dat gespeeld wordt met vijf dobbelstenen en een scorekaart met dertien basiscategorieën (gemarkeerd met * in figuur 6). Bij iedere beurt werpt de speler de vijf dobbelstenen en hij mag tot twee keer toe een deelverzameling naar keuze (0, 1, 2, 3, 4, 5 dobbelstenen) opnieuw werpen. Op het einde van de beurt moet de worp in een van de vrije basiscategorieën gescoord worden. De score hangt af van de categorie en de worp, volgens regels die te maken hebben met patronen in de worp maar die we hier niet verder uitleggen.

Elk spel bevat 38 keuzemomenten: welke deelverzameling opnieuw te werpen (26 ×) en in welke basiscategorie te scoren (12 ×). Merk op dat na de laatste worp nog maar één vrije basiscategorie resteert en er dus geen keuze nodig is. Een zorgvuldige analyse leert je dat er iets meer dan 10^9 essentieel verschillende speltoestanden zijn om in te kiezen.

Omdat alle kansen bekend zijn, is het mogelijk om de keuzes te optimaliseren voor de hoogste verwachte eindscore. We modelleren daartoe het spel Yahtzee als een zogenaamd *Markov beslissingsproces*. In 1999 schreef ik een computerprogramma dat alle berekeningen hiervoor uitvoerde (het is te vinden op mijn website, zie het einde van het artikel). Later dat jaar werden de resultaten hiervan gebruikt in een *Optimale Solitaire Yahtzee Adviseur*, waaraan je een speltoestand kan voorleggen om de beste keus te bepalen. Op de website kun je ook een *Yahtzee vaardigheidstest* doen, waarbij je een partijtje Yahtzee speelt en je keuzes vergeleken worden met optimale keuzes.

Bij optimaal spel (volgens de officiële regels) is de verwachte eindscore iets meer dan 254 punten. Menselijke spelers kunnen daar moeilijk aan tippen met hun eindscore als die gemiddeld wordt over veel partijtjes. Figuur 6 toont wat meer karakteristieken van optimaal spel. Zo valt op dat in tweederde van de optimale potjes de Yahtzee (vijf gelijken) toch nul punten scoort (66,26 in de kolom % 0), en dus in eenderde wel 50 scoort. Terwijl de Kleine Straat vrijwel nooit met nul wordt afgedaan, wat goed is voor gemiddeld 29,46 punten per spel. De grootste bijdrage komt echter van de Grote Straat (32,71). Ook blijkt dat bij optimaal spel er bijna om het andere potje vijf gelijke waarden verzameld worden (gemiddeld 0,46 per spel).

Helaas biedt een optimale strategie maar beperkt garantie op succes. Je kan de dobbelstenen niet beinvloeden. Alweer gooit variantie roet in het eten. In figuur 6 staat in kolom SD wat de standaardafwijking is. Met name is te zien dat op de eindscore onder optimaal spel een spreiding van bijna 60 punten zit. Om 99,9% (3σ) zeker te zijn dat de gemiddelde eindscore boven 250 punten komt, moet de optimale speler zo'n 2000 partijtjes spelen. (Dit aantal vind je uit $3 \cdot 60 / \sqrt{N} \leq 254 - 250$. In 14% van de partijtjes eindigt de optimale strategie boven de 300 punten, maar net zo vaak ook onder de 200 punten.

Categorie	E	SD	% 0
* Enen	1,88	1,22	10,84
* Tweeën	5,28	2,00	1,80
* Drieën	8,57	2,71	0,95
* Vieren	12,16	3,29	0,60
* Vijven	15,69	3,85	0,50
* Zessen	19,19	4,64	0,53
Bovenste Helft Bonus	23,84	16,31	31,88
* Three of a Kind	21,66	5,62	3,26
* Carré	13,10	11,07	36,34
* Full House	22,59	7,38	9,63
* Kleine Straat	29,46	3,99	1,80
* Grote Straat	32,71	15,44	18,22
* Yahtzee	16,87	23,64	66,26
* Chance	22,01	2,54	0,00
Extra Yahtzee Bonus	9,58	34,08	91,76
TOTAAL GENERAAL	254,59	59,61	0,00
Yahtzees Geworpen	0,46	0,69	63,24
Jokers Gebruikt	0,04	0,19	96,30

Figuur 6 Optimaal solitaire Yahtzee: verwachting (E), standaarddeviatie (SD) en percentage nulscores (% 0), per categorie

SLOTOPMERKINGEN Het 'echte' leven lijkt op het spelen van een spel, in die zin dat er voor beide een noodzaak is om goede beslissingen te nemen in onzekere situaties. Het zal dan ook niet verbazen dat hiervoor dezelfde wiskundige technieken toepasbaar zijn.

Bij combinatorische spelen is recent veel vooruitgang geboekt door slimmere algoritmen en snellere computers. De wereldkampioen schaken is al eens verslagen door een computer. Via Monte-Carlo methoden (die gebruik maken van toevalsstrategieën) is de computer ook bij het bordspel go aan een opmars begonnen.

Het kan als een verrassing komen dat bij herhaalde strategische beslissingen, zoals bij het muntspel, een optimale keuze gebaseerd moet worden op een toevalsstrategie (door tossen van een geschikte 'munt'). De gemengde Nash-strategie vermijdt voorspelbaarheid en daarmee dat men uitgebuit wordt. Slim toepassen van het toeval kan rendabel zijn.

Bij herhaalde geluksbeproevingen kan een vaste optimale keuze bepaald worden door middel van Markov beslissingsprocessen. Maar als toeval in het spel komt, dan moet de rol van variantie niet onderschat worden. Een grote standaarddeviatie vereist veel geduld, in de vorm van een tegenintuïtief groot aantal herhalingen dat nodig is om je zekerheid te verhogen. Dat komt doordat bij N herhalingen de spreiding niet met een factor N verkleind wordt, maar slechts met een factor $\sqrt{N}$. De spreiding reduceren met een factor 10 vereist dus 100 keer zoveel herhalingen.

Een grotere spreiding reduceert voorspelbaarheid en hindert daarom het maken van toekomstplannen, zoals begrotingen voor onderhoudsuitgaven. Bij bestrijden van het fileprobleem is het veel beter om je te richten op het reduceren van de spreiding in de reistijd (verhogen van voorspelbaarheid) dan op het minimaliseren van de verwachte reistijd. Dat laatste gaat juist vaak de gepaard met verhogen van de spreiding. Gelukkig zijn de filebestrijders daar enige tijd geleden ook achtergekomen, zoals te lezen is in de *Nota Mobiliteit* op www.notamobiliteit.nl.

VERDER LEZEN Naast het al genoemde *Luck, Logic, and White Lies: The Mathematics of Games* van J. Bewersdorff is het monumentale en onderhoudende *Winning Ways for Your Mathematical Plays* van E.R. Berlekamp, J.H. Conway en R.K. Guy een inspirerend naslagwerk voor combinatorische spelen. De website van de auteur: www.win.tue.nl/~wstomv. ■