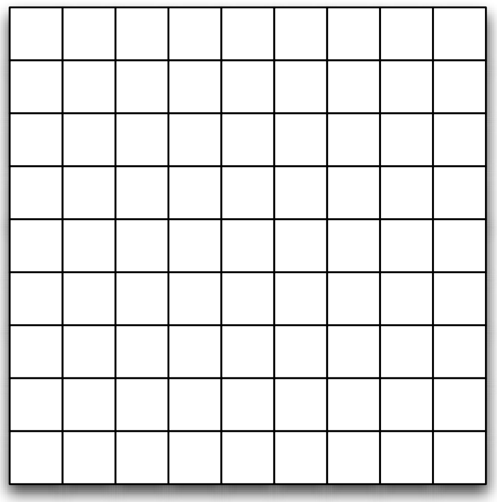
Wiskunde en creativiteit

Tom Verhoeff

Al op de kleuterschool kreeg ik mijn bedenkingen bij de manier waarop het onderwijs omgaat met creativiteit. Creativiteit kwam toen niet verder dan de (door juffen opgelegde) gedachte om toiletrollen te gebruiken voor een ander doel dan wc-papier oprollen: het maken van sinterklazen en zwarte pieten. Dat bleek in die klas overigens jaar in, jaar uit te gebeuren (en waarschijnlijk gebeurt dat nog steeds). Wat een creativiteit.

Op de middelbare school had ik een tekendocent die toch wat meer uit me kreeg (dat het een goede docent was ben ik pas veel later gaan waarderen). Maar ook daar werd creativiteit nooit als zodanig besproken. Je creëerde een tekening, veelal op basis van een gegeven situatie of een gedachte. Oorsprong en doel van die gedachte deden niet ter zake.

Op school heerste de opvatting dat wiskunde, een exacte wetenschap, een tegenpool was van de 'creatieve' vakken. Dat liet me tamelijk koud, want ik vond wiskunde gewoon leuk, al wist ik er eigenlijk niet veel van.



Figuur 1: 9×9 bord (denk zelf op elk vakje een vlo erbij)

Toen ik wiskunde ging studeren aan de THE (ik kreeg daar ook van Jan les, zoals Inleiding Mechanica) opende zich een nieuwe wereld. Een wereld waar gedachten en ideeën centraal stonden. Waar een enorm bouwwerk werd opgezet met allemaal nieuwe begrippen. Toch werd dit in de wiskundeopleiding meestal niet geassocieerd met creativiteit. Maar een wiskundige beseft dat voor het oplossen van een probleem je vaak juist iets nieuws moet bedenken, iets dat niet zomaar vanzelf komt aanwaaien. Dat vereist creativiteit bij uitstek.

Helaas dringt hiervan maar heel weinig door tot de 'buiten'wereld, buiten de wiskunde. En ook dit stuktje zal het daar niet ver schoppen. Maar ik ga toch een voorbeeld geven dat misschien bij sommigen iets kan losmaken.

Het voorbeeld is geïnspireerd door Opgave 145 van de Pythagoras Olympiade (46ste jaargang, juni 2007). Onderdeel a van de opgave luidt:

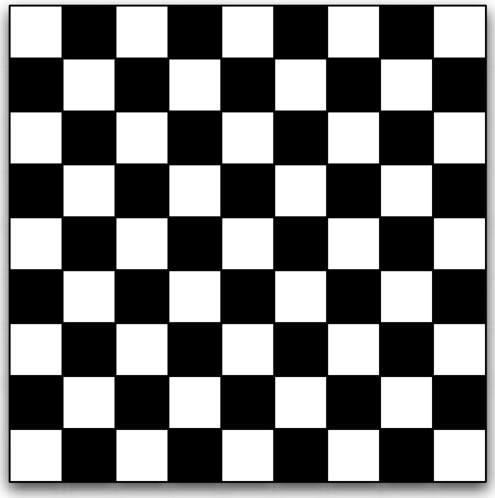
> Op ieder vakje van een 9×9 bord (zie figuur 1) zit een afgerichte vlo. Als je in je handen klapt springen alle vlooien naar een *diagonaal* buurvakje (dat dus alleen aan een hoekpunt grenst).
> Hoeveel vakjes zijn na de klap *minimaal* leeg?

Even tussendoor: Het stellen van interessante vragen is een nog grotere kunst dan het oplossen ervan. Kunnen onze (wiskunde)docenten op lagere en middelbare scholen dit probleem oplossen en hun oplossing uitleggen aan leerlingen? En dan ook nog op een inspirerende manier?

Ik kon het niet laten om er mee aan de slag te gaan. Sommige slimmeriken zien dit soort dingen meteen, maar ik moest toch wat 'ploeteren'. Ik ga hier niet in alle detail uiteenzetten hoe ik dit probleem heb opgelost. Probeer het eerst zelf eens.

Het is al gauw duidelijk dat er erg veel mogelijk is op dat vlooienbord als je in je handen klapt. Wanneer je wat probeert, zie je dat er een aantal vakjes leeg wordt. En met nog wat handiger proberen zelfs nog wat minder. En dan krijg je (misschien ten onrechte) het idee dat het met minder echt niet kan. Als je dat zeker wilt weten (en een wiskundige wil dat), moet je iets ovetuigenders doen dan alleen maar proberen.

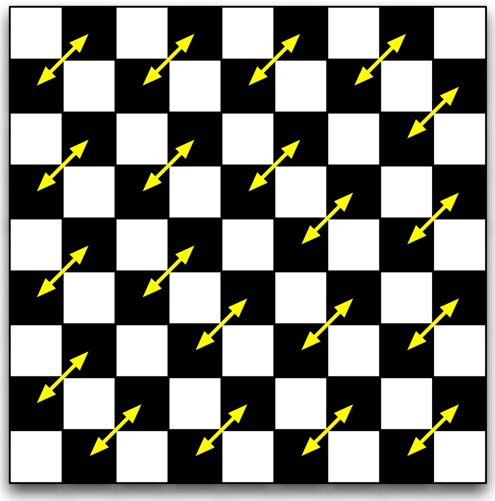
De wiskundige probleemoplosser heeft een heel repertoire aan basistechnieken om verder te komen. Bijvoorbeeld: bestudeer eens een kleiner bord. De vlo op een 1×1 bord kan nergens heen. Op een 2×2 bord heeft elke vlo maar één bestemming en blijft achteraf niets leeg. Dat is te generaliseren naar alle even-bij-even borden waar niets leeg hoeft te worden.



Figuur 2: 9×9 'schaak'bord (denk weer op elk vakje een vlo erbij)

Het 3×3 bord is spannender. Dat zouden ze op de lagere school moeten kunnen uitspelen. Er zijn na de klap 3, 4 of 5 vakjes leeg. Maar 5×5 loopt zonder systematiek al uit de hand.

Een creatieve stap is om een schaakbordpatroon aan te brengen (zie figuur 2), misschien wel ingegeven door de lopers die diagoneel bewegen bij het schaken. Vlooien blijven op hun eigen kleur. De 'witte' en de 'zwarte' vlooien leven in strict gescheiden werelden.

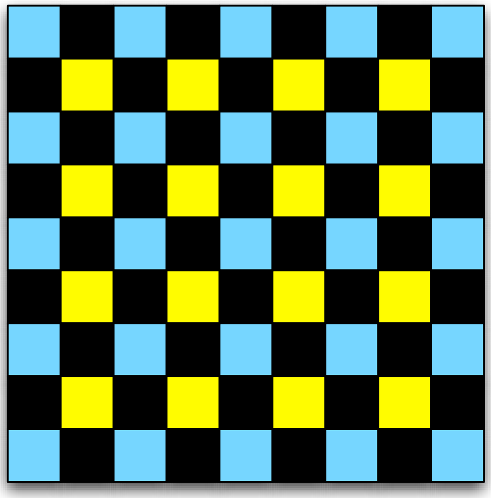


Figuur 3: 9×9 'schaak'bord met de zwarte velden 'gepaard'

Het probleem valt daardoor uiteen in twee onafhankelijke deelproblemen: hoeveel witte vakjes worden minimaal leeg, en hoeveel zwarte?

Als we op een oneven-bij-oneven bord een hoek wit kleuren, dan is er een even aantal zwarte vakjes. Bovendien zijn deze vakjes eenvoudig te 'paren' (vlooien die naar elkaars vakje springen), zodat er geen enkel zwart vakje leeg hoeft te worden (zie figuur 3). Dat kan ook op talloze andere manieren, met langere cykels van elkaar naspringende vlooien.

Hoe zit het met de witte vakjes? Hier kun je weer het nodige prutsen. Tot je opvalt dat ook hier meer structuur aanwezig is. Deze structuur is zichtbaar te maken door de witte velden diagonaal alternerend blauw en geel te kleuren (zie figuur 4; de hoeken zijn blauw).



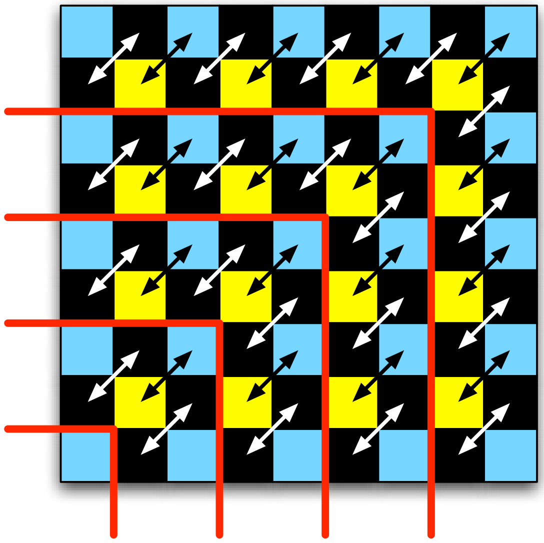
Figuur 4: 9×9 driekleurig bord (met op elk vakje een vlo)

Een 'blauwe' vlo 'wordt' na de klap altijd 'geel' en een 'gele' vlo altijd 'blauw'. Op het 9×9 bord zijn er $5 \times 5 - 4 \times 4 = (5-4) \times (5+4) = 9$ blauwe vakjes *meer* dan gele. Na de klap zijn dus minstens 9 (blauwe) vakjes leeg: er zijn 9 'gele' vlooien te weinig om alle blauwe vakjes te vullen.

De lezer kan in figuur 5 zien dat alle gele vakjes wel gevuld kunnen worden en dat er niet meer dan 9 blauwe vakjes leeg hoeven te worden.

Is het argument voor de ondergrens 9 niet fraai? (Je waardeert dat misschien pas als je je realiseert hoeveel er te proberen valt zonder een stap dichterbij een sluitend argument te komen.)

Die kleuringen vind ik creatief. Je moet ze zelf bedenken. Men zou kunnen beweren dat ze al latent aanwezig waren in het probleem en dat je ze alleen maar hoefde te ontdekken (daar ben ik het niet mee eens; je kan



Figuur 5: 9×9 driekleurig bord met recursief gepaarde vakjes

het probleem waarschijnlijk ook anders oplossen). Hoe dan ook, de kleuringen geven enorm veel structuur, die uitermate verhelderend werkt. De kleuring abstraheert van allerlei irrelevante details en bezorgt me een kick.

Hier moet toch wat mee te doen zijn op school? Zulke problemen spreken niet iedereen aan, maar ze lijken me een stuk toegankelijker en aantrekkelijker dan sommige van de andere dingen die onder de naam wiskunde worden aangeboden. En wat telt is dat het je leert abstraheren. Abstractie is een van de allerbelangrijkste dingen om op school te leren.

Initiatieven zoals het wiskundetijdschrift Pythagoras, de Nederlandse Wiskunde Olympiade, de Europese Kangoeroe reken- en wiskundewedstrijd, de wiskundige zomerkampen van de Stichting Vierkant voor Wiskunde en regionale wiskundekringen proberen dit soort creatief wiskundig exploreren gelukkig wel te stimuleren.

Onderdeel b van de opgave vraagt om het *maximale* aantal vakjes dat na de klap leeg is. Ik laat het oplossen graag over aan de creatieve lezer.