

Polygonen met Constante Torsie

Algemeen Wiskunde Colloquium
23 juni 2009, TU/e

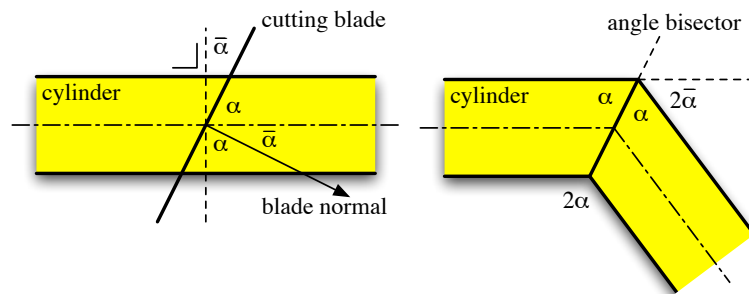
Tom Verhoeff
Technische Universiteit Eindhoven
Faculteit Wiskunde & Informatica

Wiskunst

Koos Verhoeff
Valkenswaard



Verstek



Swing

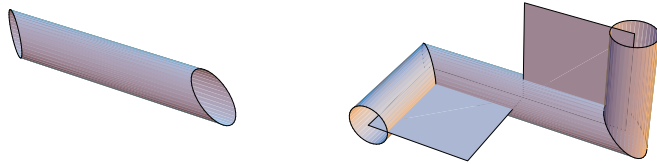
Karel de Grotelaan
Eindhoven



Arie Berkulin
1977

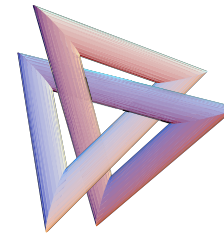


Ruimtelijk Verstek

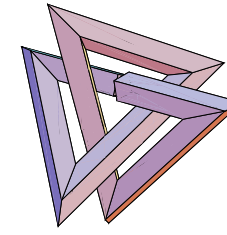


- Aangrenzende balksegmenten spannen een vlak op: **knikvlak**
- **Torsiehoek** = hoek tussen aangrenzende knikvlakken

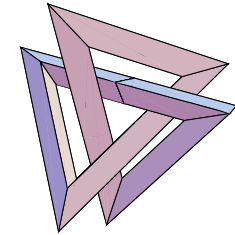
Verstek dat (Niet) Sluit



Rond profiel



Vierkant profiel

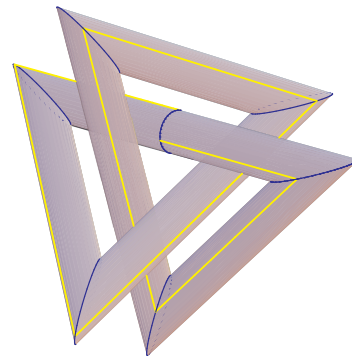


Driehoekig profiel

Verstekstelling

De totale torsie is een inherente eigenschap van het polygonale pad en hangt *niet* af van

- keuze eerste segment
- initiële rotatie van profiel om hartlijn
- vorm van profiel



Stelling: **Verstek sluit \iff totale torsie is symmetrie van profiel**

Drie Technieken om Torsie te Beheersen

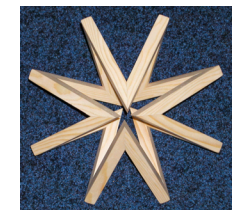
'Pruitsen'



Roosterwandelen



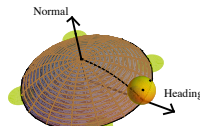
Constante torsie



3D Schildpad Meetkunde (Turtle Geometry)

Toestand :

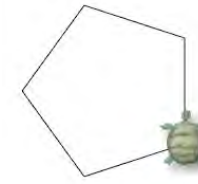
- Positie in de ruimte
- Houding = (richtingsvector, normaalvector)



Commando's :

- $Move(d)$: beweeg afstand d langs richtingsvector
- $Turn(\varphi)$: draai over hoek φ om normaalvector
- $Roll(\psi)$: rol over hoek ψ om richtingsvector

Regelmatige Vlakke Veelhoeken



- Alle segmenten hebben dezelfde lengte
- Alle knikhoeken zijn hetzelfde, nl. $180^\circ - 360^\circ/N$

Logo programma: Repeat N [Forward 100 Left 360 / N]

Generalisatie naar 3D

Extra eis: Alle torsiehoeken zijn hetzelfde (in absolute waarde)

Constance-Torsie Polygonen

Definieer

$$Segment(d, \psi, \varphi) = Move(d) ; Roll(\psi) ; Turn(\varphi)$$

Constance-Torsie (CT) pad: geproduceerd door rij van $Segment(d_i, \psi_i, \varphi_i)$ met alle $|\psi_i| = \psi$, alle $d_i > 0$, en alle $\varphi_i \neq 0 \pmod{180^\circ}$

Regelmatig pad: alle $d_i = d$ and $\varphi_i = \varphi$ for $0 < \varphi < 180^\circ$

CT polygoon: netjes gesloten CT pad

Schildpad programma heet **netjes gesloten** wanneer schildpad eindigt in initiële toestand, d.w.z. initiële positie en initiële houding

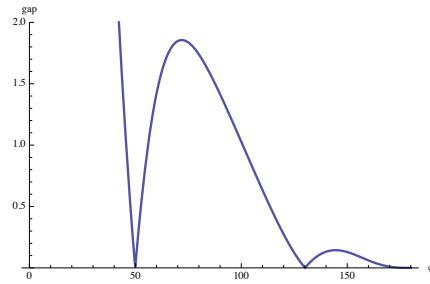
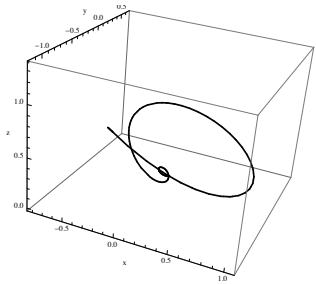
CT polygoon is bepaald door d, ψ, φ en de rij van rol-tekens

Constructie van CT Polygonen

Existentie van tekenrij en waarden van hoeken ψ, φ niet evident

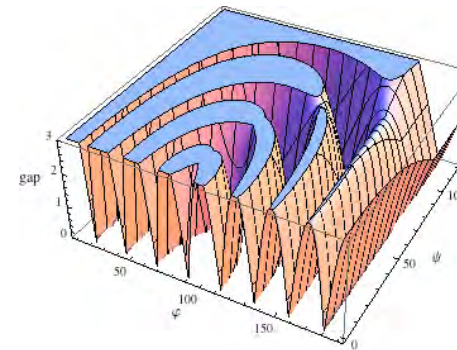
Methode: Kies tekenrij en één van ψ of φ , bepaal dan de andere hoek

Bijv.: Gegeven tekenrij $(+ + - -)^4$, $\psi = 90^\circ$, bepaal φ voor sluiting

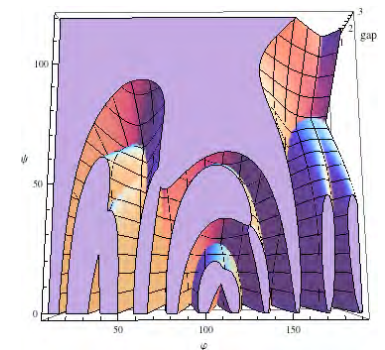


ϕ - ψ Landschappen

+++++-----
16 segmenten



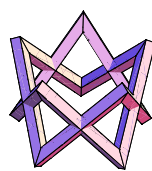
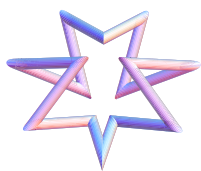
+++++-----
20 segmenten



Enkele Observaties over CT Polygonen

Gesloten CT pad hoeft geen CT polygoon te zijn

$\psi = 90^\circ$, $\varphi = 120^\circ$, tekenrij +-----+



CT polygoon kan zelfdoorsnijdend zijn
 $\psi = 90^\circ$, $\varphi = 112.456^\circ$, tekenrij +-+-----

Eigenschappen van Regelmatige Constante-Torsie Polygonen

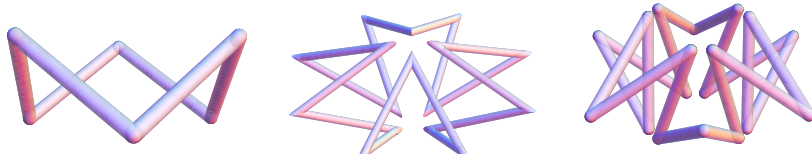
Afstand tussen hoekpunten met k segmenten ertussen is constant voor $k = 1, 2, 3$

$$\text{Totale torsie} = \sum_{i=1}^n \psi_i \equiv 0 \pmod{\psi}$$

Gevolg: Verstek sluit $\iff \psi$ is symmetrie van profiel

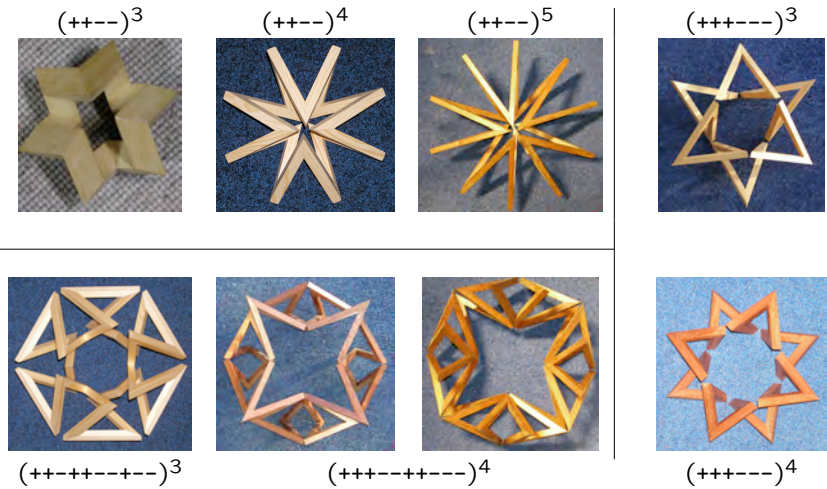
Bij vierkant profiel is $\psi = 90^\circ$ praktisch

Enkele Oneindige Families van Regelmatige CT Polygonen



- Alternierende tekens $(+-)^n$: 'kronen', hoekpunten in twee lagen
- $(+++)^n$: hoekpunten in drie lagen
- $(+++---)^n$: hoekpunten in vier lagen

Kunstwerken



Conclusie

- Definitie van (regelmatige) 3D polygoenen met constante torsie
- Enkele eigenschappen ervan
- Enkele constructies
- Kunstwerken

Open problemen:

- Volledige karakterisatie ervan
- Zitten er knopen tussen?
- Is een Möbiusslag mogelijk: totale torsie $\neq 0 \pmod{360^\circ}$

Meer Informatie

- "The Mathematics of Mitering and Its Artful Application", Bridges 2008
- "Regular 3D Polygonal Circuits of Constant Torsion", Bridges 2009
- Mathematica Demonstrations Project:
 - Miter Joint and Fold Joint*
 - Mitering a Closed 3D Path*
 - 3D Flying Pipe-laying Turtle*
- Stichting Wiskunst Koos Verhoeff
wiskunst.dse.nl