

# Polygonen met Constante Torsie

---

*Algemeen Wiskunde Colloquium*

23 juni 2009, TU/e

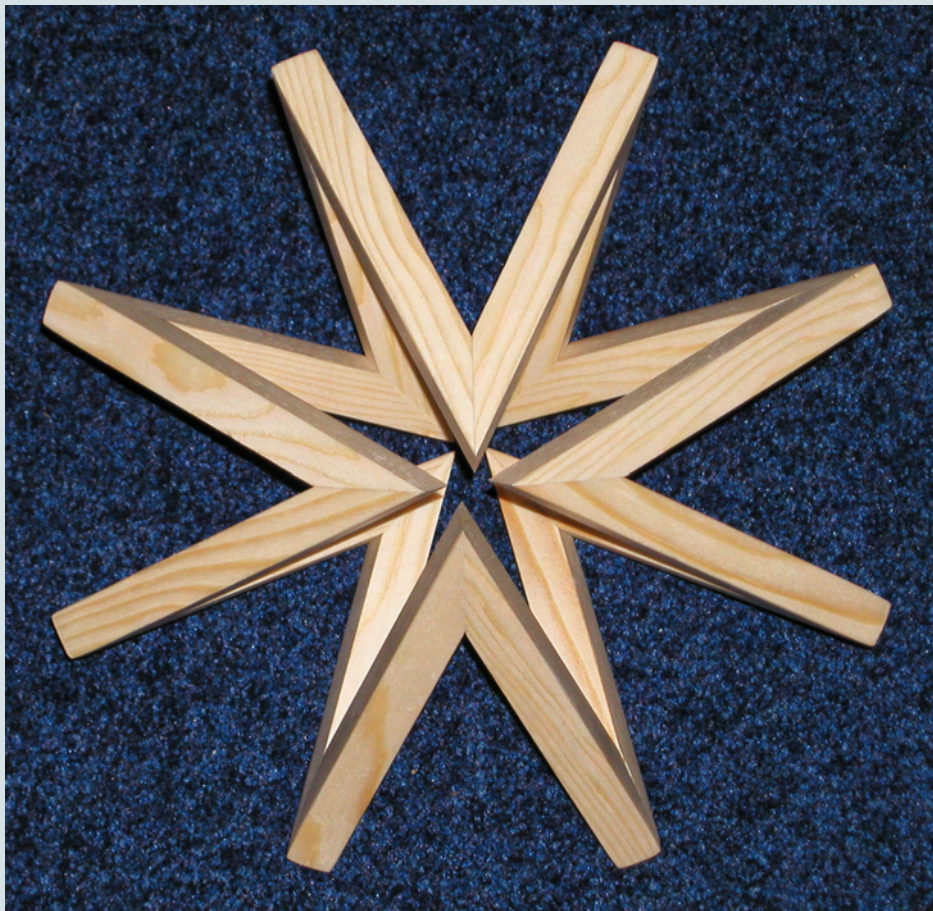
*Tom Verhoeff*

Technische Universiteit Eindhoven  
Faculteit Wiskunde & Informatica

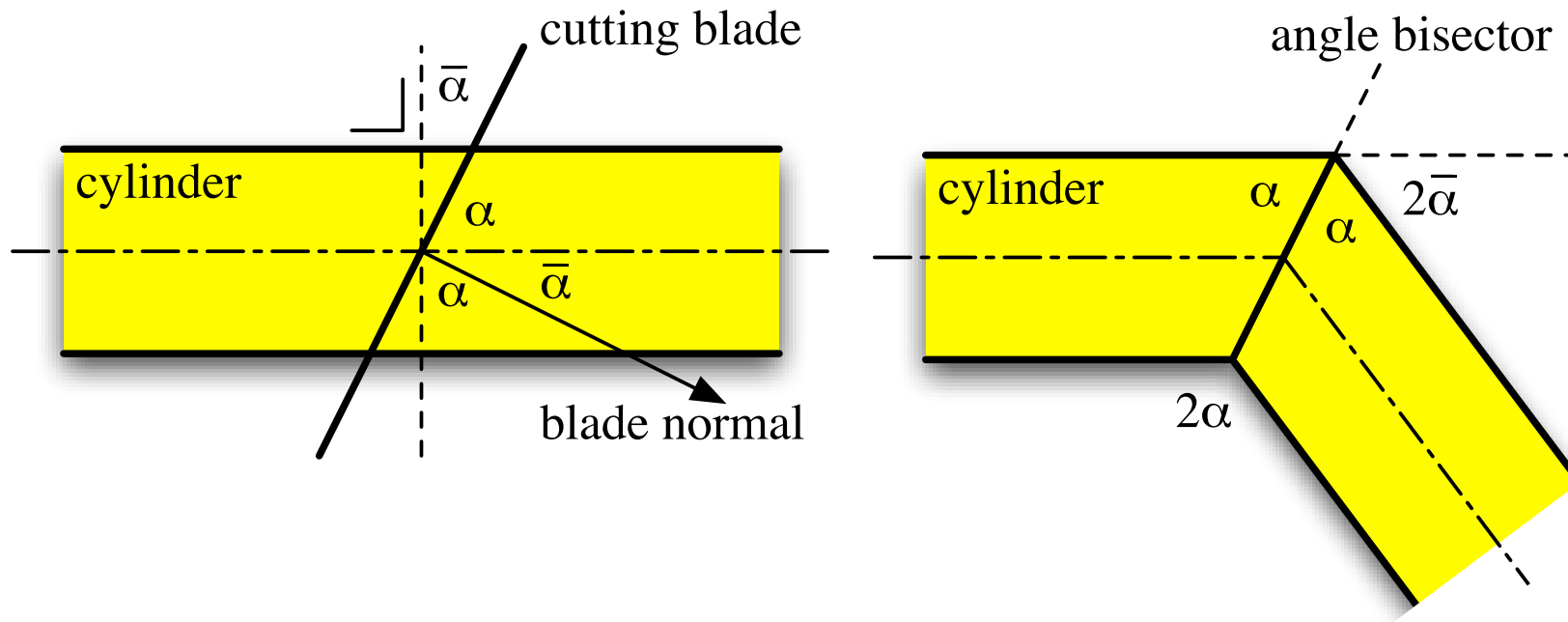
# Wiskunst

---

*Koos Verhoeff*  
Valkenswaard



# Verstek



# Swing

---

Karel de Grotelaan  
Eindhoven

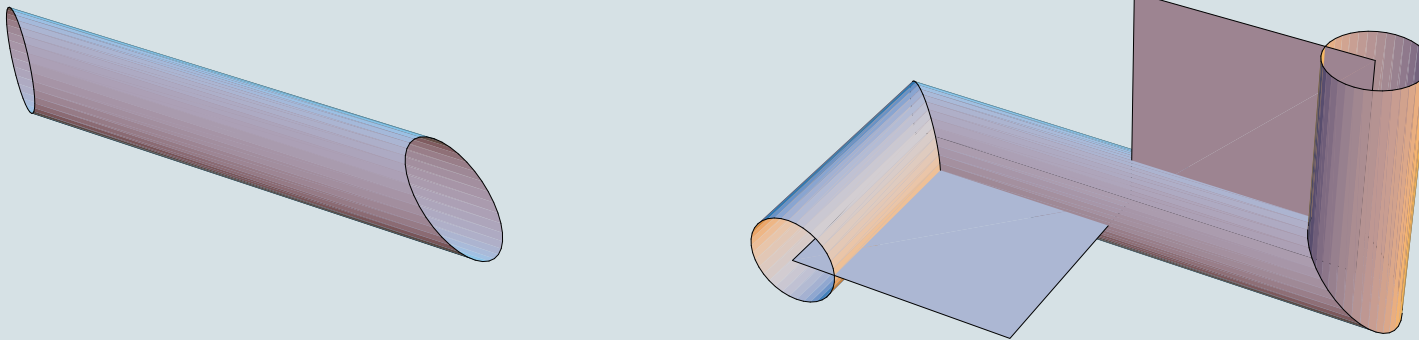


Arie Berkulin  
1977



## Ruimtelijk Verstek

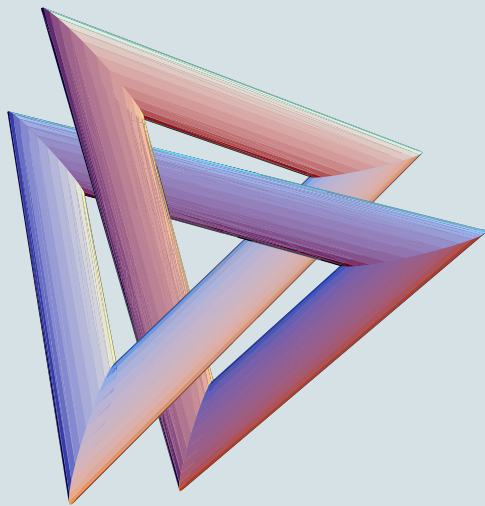
---



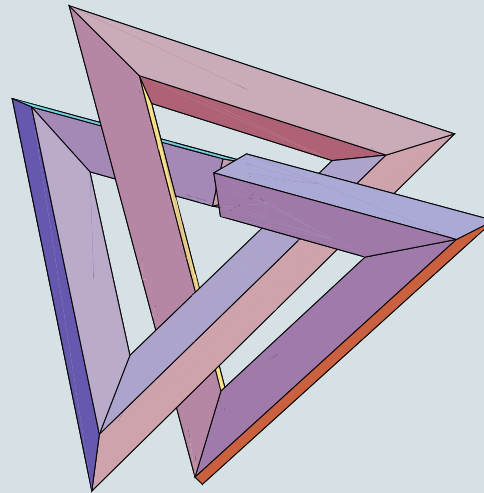
- Aangrenzende balksegmenten spannen een vlak op: **knikvlak**
- **Torsiehoek** = hoek tussen aangrenzende knikvlakken

## Verstek dat (Niet) Sluit

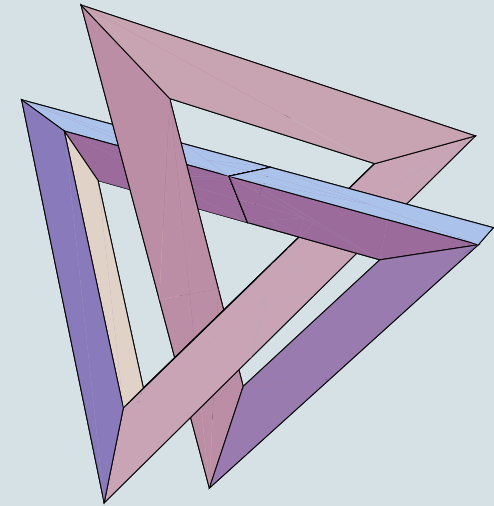
---



Rond profiel



Vierkant profiel



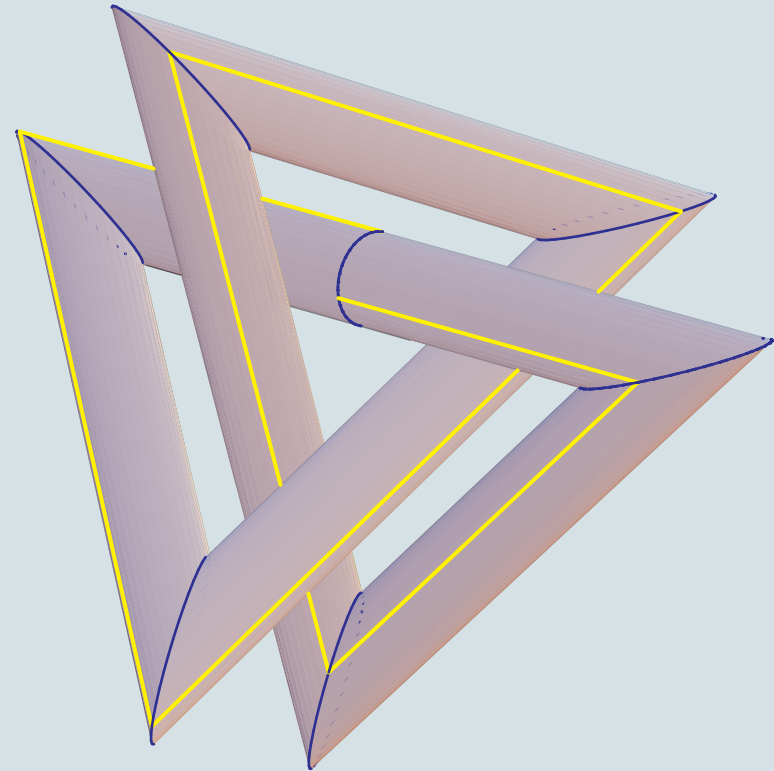
Driehoekig profiel

## Verstekstelling

---

De totale torsie is een inherente eigenschap van het polygonale pad en hangt *niet* af van

- keuze eerste segment
- initiële rotatie van profiel om hartlijn
- vorm van profiel



Stelling: Verstek sluit  $\iff$  totale torsie is symmetrie van profiel

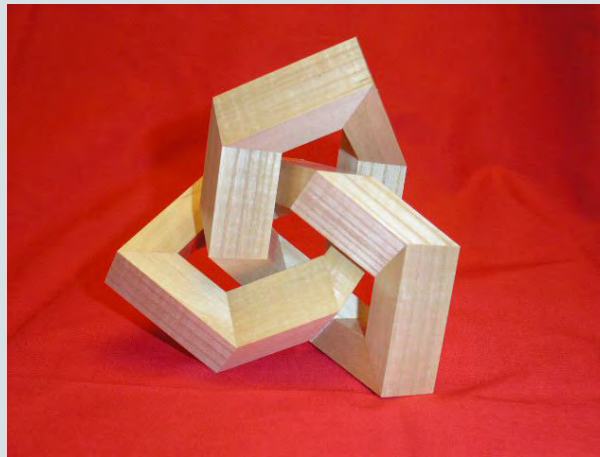
# Drie Technieken om Torsie te Beheersen

---

'Prutsen'



Roosterwandelen



Constante torsie



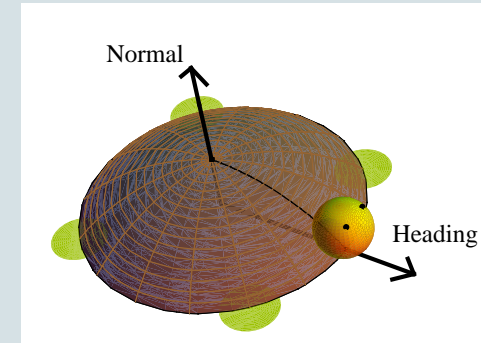


## 3D Schildpad Meetkunde (Turtle Geometry)

---

### Toestand :

- Positie in de ruimte
- Houding = ( richtingsvector, normaalvector )

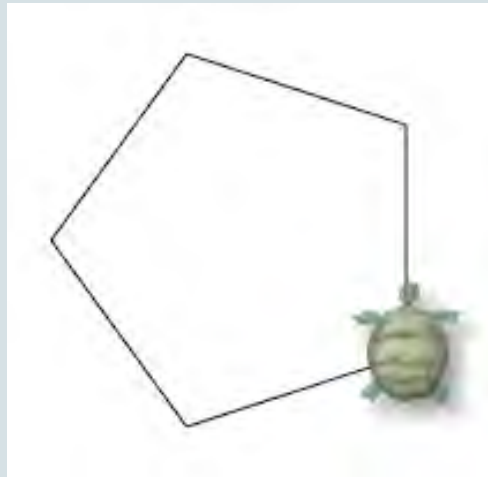


### Commando's :

- $Move(d)$ : beweeg afstand  $d$  langs richtingsvector
- $Turn(\varphi)$ : draai over hoek  $\varphi$  om normaalvector
- $Roll(\psi)$ : rol over hoek  $\psi$  om richtingsvector

## Regelmatige Vlakke Veelhoeken

---



- Alle segmenten hebben dezelfde lengte
- Alle knikhoecken zijn hetzelfde, nl.  $180^\circ - 360^\circ/N$

Logo programma: `Repeat N [ Forward 100 Left 360 / N ]`

## Generalisatie naar 3D

---

Extra eis: Alle torsiehoeken zijn hetzelfde (in absolute waarde)

## Constante-Torsie Polygonen

---

Definieer

$$\text{Segment}(d, \psi, \varphi) = \text{Move}(d) ; \text{Roll}(\psi) ; \text{Turn}(\varphi)$$

**Constante-Torsie** (CT) pad: geproduceerd door rij van  $\text{Segment}(d_i, \psi_i, \varphi_i)$  met alle  $|\psi_i| = \psi$ , alle  $d_i > 0$ , en alle  $\varphi_i \neq 0 \pmod{180^\circ}$

**Regelmatig** pad: alle  $d_i = d$  and  $\varphi_i = \varphi$  for  $0 < \varphi < 180^\circ$

**CT polygoon**: netjes gesloten CT pad

Schildpad programma heet **netjes gesloten** wanneer schildpad eindigt in initiële toestand, d.w.z. initiële positie *en* initiële houding

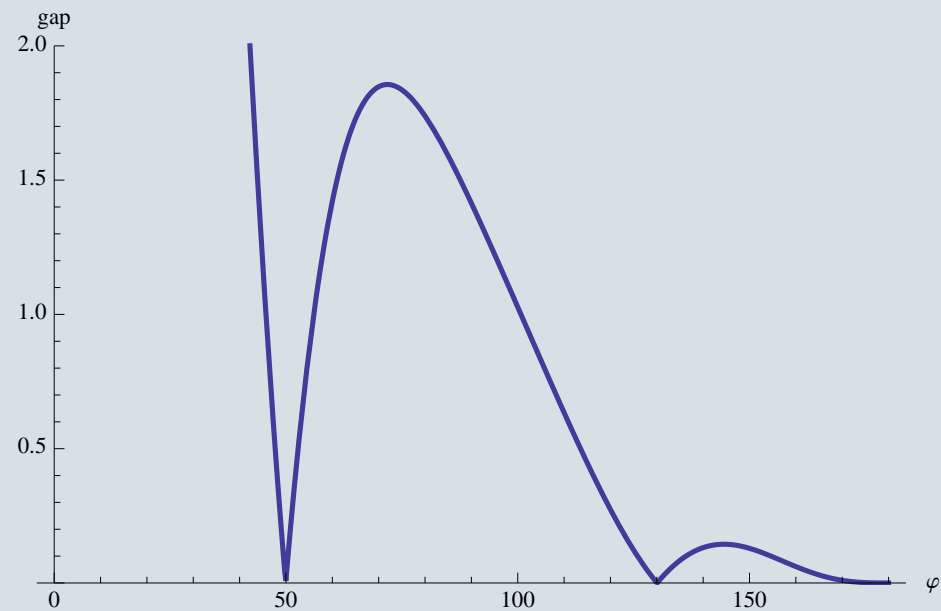
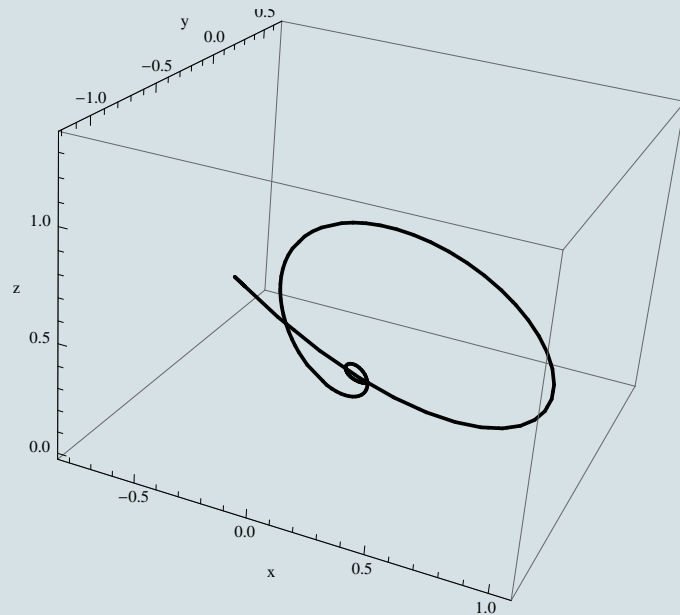
CT polygoon is bepaald door  $d, \psi, \varphi$  en de rij van rol-*tekens*

## Constructie van CT Polygonen

Existentie van tekenrij en waarden van hoeken  $\psi, \varphi$  niet evident

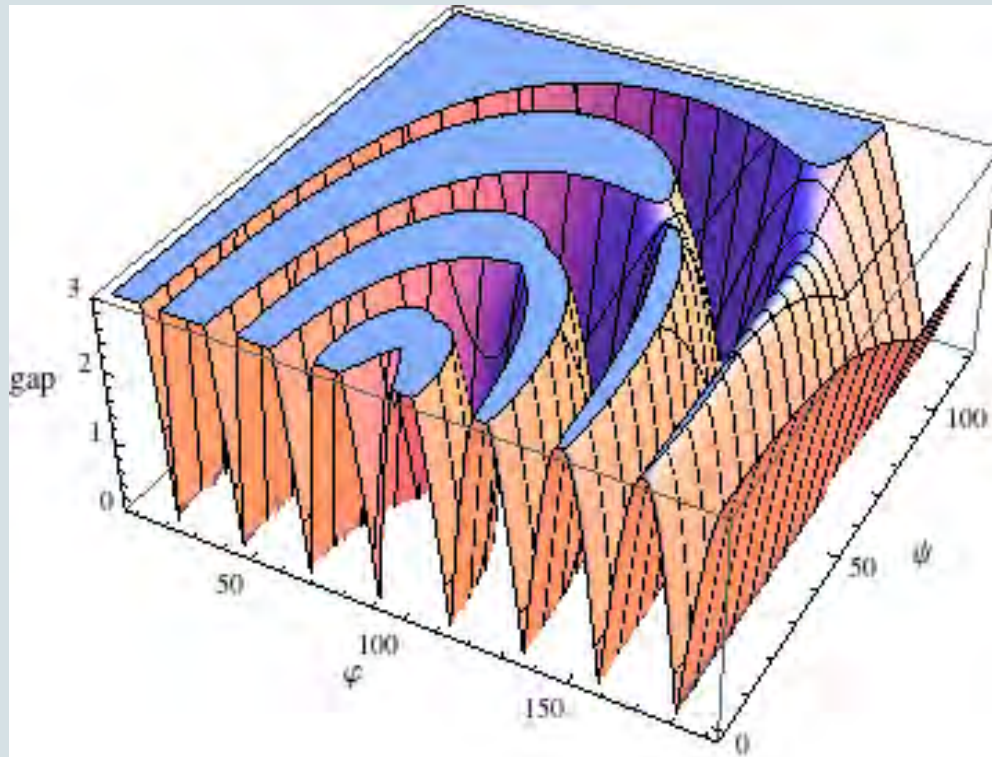
Methode: Kies tekenrij en één van  $\psi$  of  $\varphi$ , bepaal dan de andere hoek

Bijv.: Gegeven tekenrij  $(++--)^4$ ,  $\psi = 90^\circ$ , bepaal  $\varphi$  voor sluiting

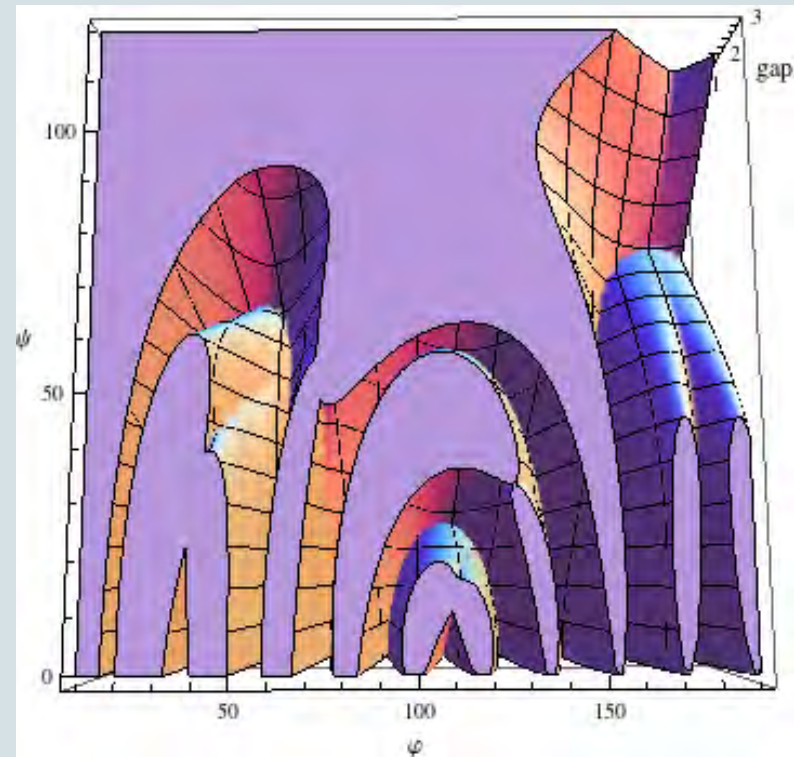


# $\phi$ - $\psi$ Landschappen

++---++---++---++---  
16 segmenten



++---++---++---++---++---  
20 segmenten

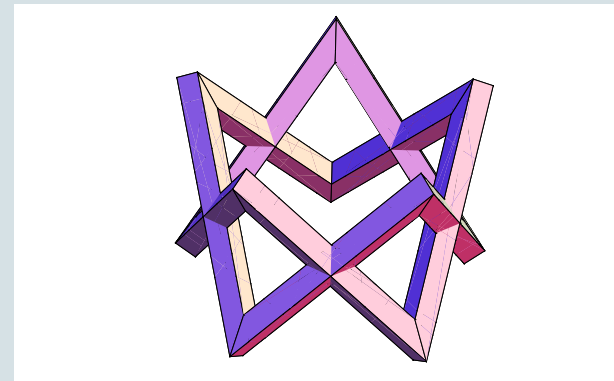
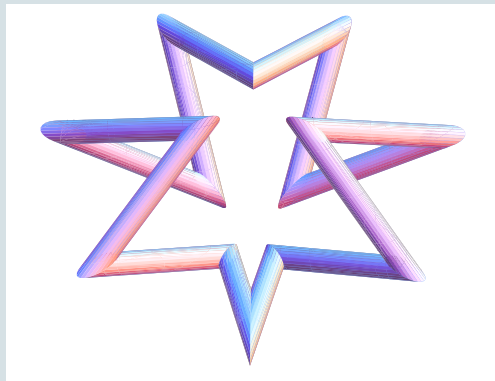


## Enkele Observaties over CT Polygoonen

---

Gesloten CT pad hoeft geen CT polygoon te zijn

$\psi = 90^\circ$ ,  $\varphi = 120^\circ$ , tekenrij  $+---++---++---++-$



CT polygoon kan zelfdoorsnijdend zijn

$\psi = 90^\circ$ ,  $\varphi = 112.456^\circ$ , tekenrij  $+--+--+--+--+$

## Eigenschappen van Regelmatige Constante-Torsie Polygonen

---

Afstand tussen hoekpunten met  $k$  segmenten ertussen is constant voor  $k = 1, 2, 3$

$$\text{Totale torsie} = \sum_{i=1}^n \psi_i \equiv 0 \pmod{\psi}$$

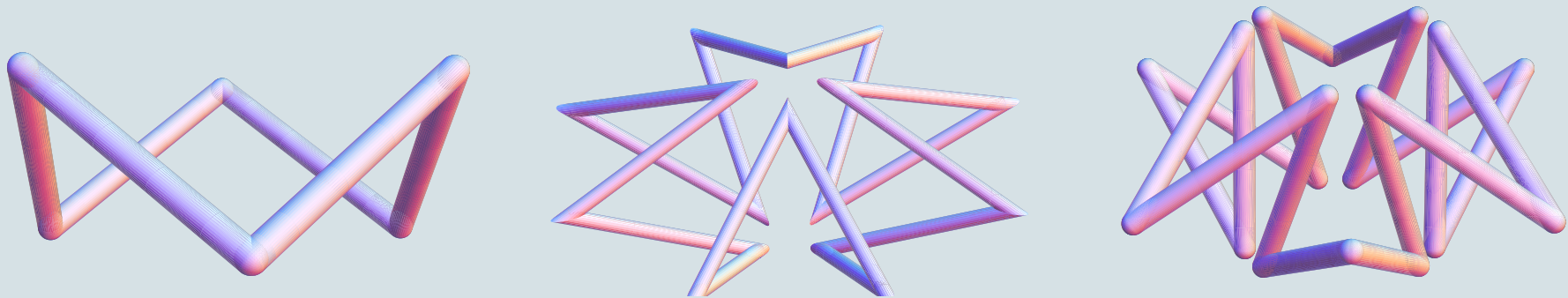
Gevolg: Verstek sluit  $\iff \psi$  is symmetrie van profiel

Bij vierkant profiel is  $\psi = 90^\circ$  praktisch



## Enkele Oneindige Families van Regelmatige CT Polygonen

---



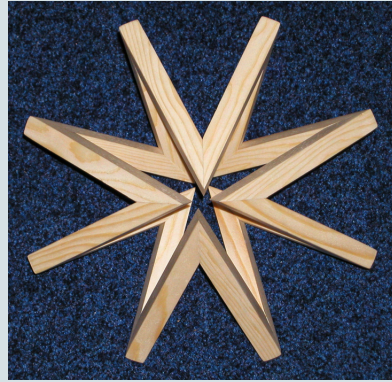
- Alternierende tekens  $(+-)^n$ : 'kronen', hoekpunten in twee lagen
- $(++--)^n$ : hoekpunten in drie lagen
- $(+++---)^n$ : hoekpunten in vier lagen

# Kunstwerken

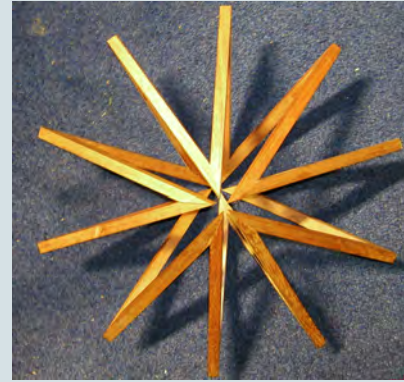
$(++--)^3$



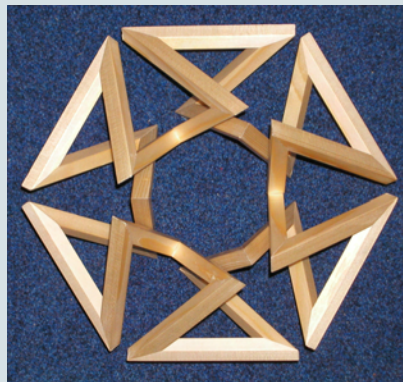
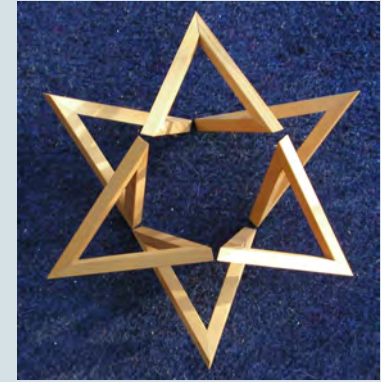
$(++--)^4$



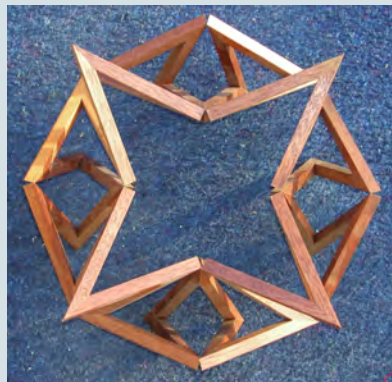
$(++--)^5$



$(+++---)^3$



$(++-+++---)^3$



$(+++---++---)^4$



$(+++---)^4$

## Conclusie

---

- Definitie van (regelmatige) 3D polygoenen met constante torsie
- Enkele eigenschappen ervan
- Enkele constructies
- Kunstwerken

Open problemen:

- Volledige karakterisatie ervan
- Zitten er knopen tussen?
- Is een Möbiusslag mogelijk: totale torsie  $\neq 0 \pmod{360^\circ}$

## Meer Informatie

---

- “The Mathematics of Mitering and Its Artful Application”,  
Bridges 2008
- “Regular 3D Polygonal Circuits of Constant Torsion”,  
Bridges 2009
- Mathematica Demonstrations Project:  
*Miter Joint and Fold Joint*  
*Mitering a Closed 3D Path*  
*3D Flying Pipe-laying Turtle*
- Stichting Wiskunst Koos Verhoeff  
[wiskunst.dse.nl](http://wiskunst.dse.nl)