

Ruimtelijke polygonen verstekken: (geen) kunst

Lezing op de *Nationale Wiskunde Dagen 2010*
6 Februari 2010, Noordwijkerhout

Tom Verhoeff



Faculteit Wiskunde & Informatica



Werk van Koos Verhoeff



Stichting Wiskunst Koos Verhoeff
wiskunst.dse.nl

Klaverknoop



Tweekleurig (5, 1)-Toruspad

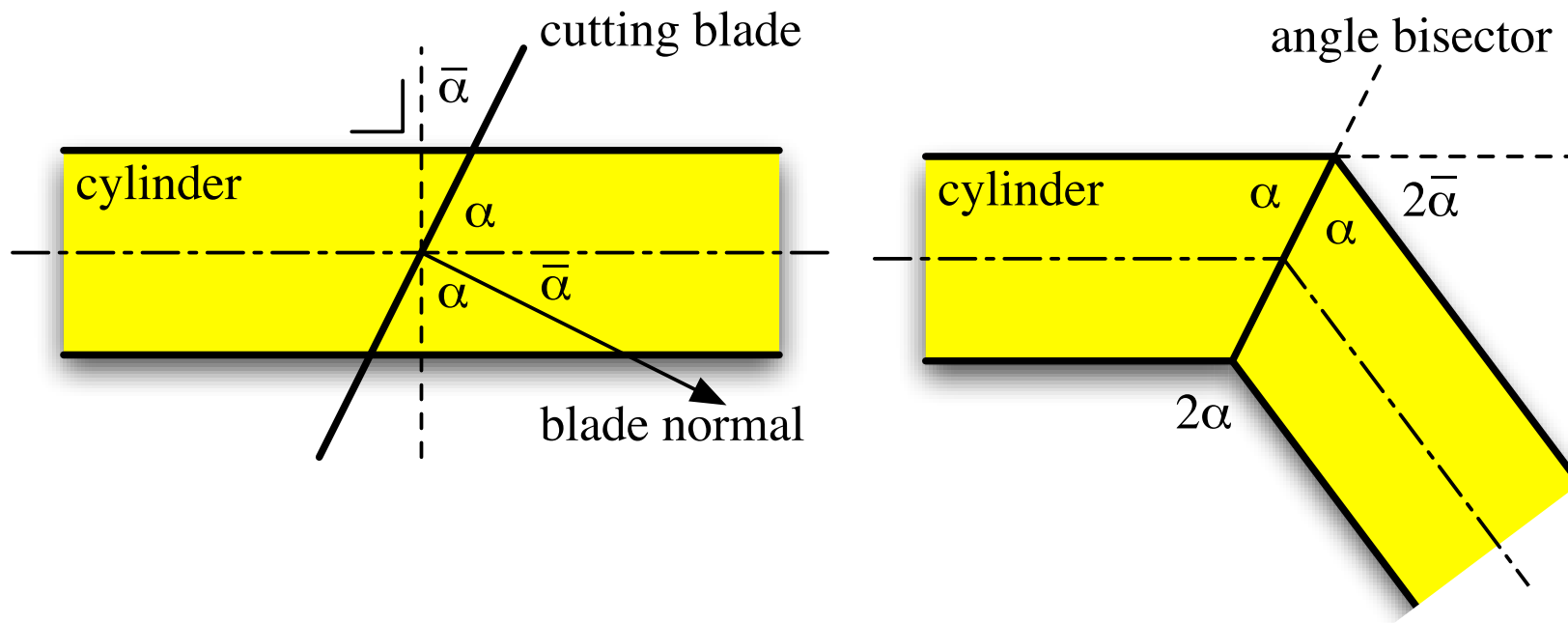


Vroegste Werk: Karakteristieken

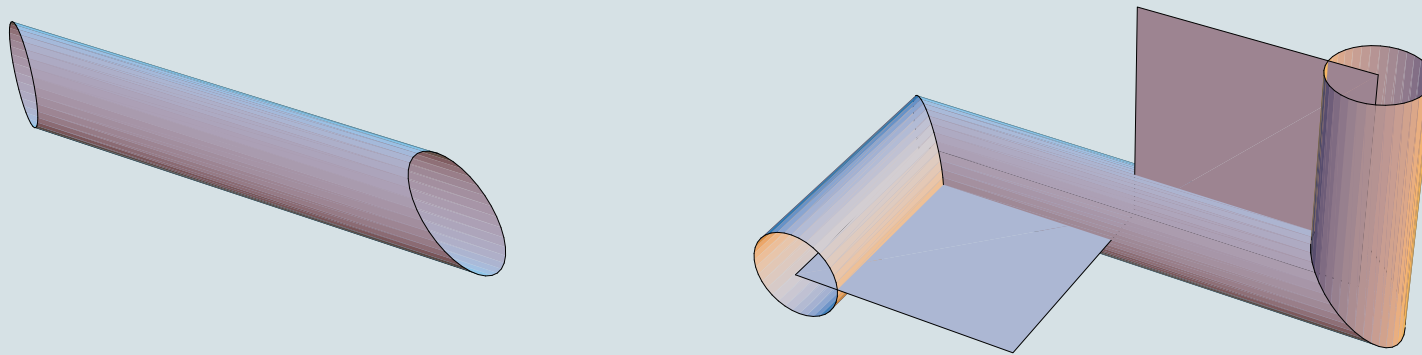
- “Willekeurige” *gesloten* ruimtelijke polygonale paden
- “Ad hoc” keuze van hoekpunten, “ad hoc” verbindingshoeken
Geen a priori beperkingen, anders dan t.b.v. symmetrie
- Klassieke verstekverbindingen
- “Ad hoc” zaaghoeken, “ad hoc” vorm van zaagvlakken
- Bij elke verbinding sluiten de naden van de balken netjes aan

Dat laatste is niet triviaal: de hoekpunten moeten geschikt worden gepositioneerd

Afgezaagde balk en de klassieke verstekverbinding

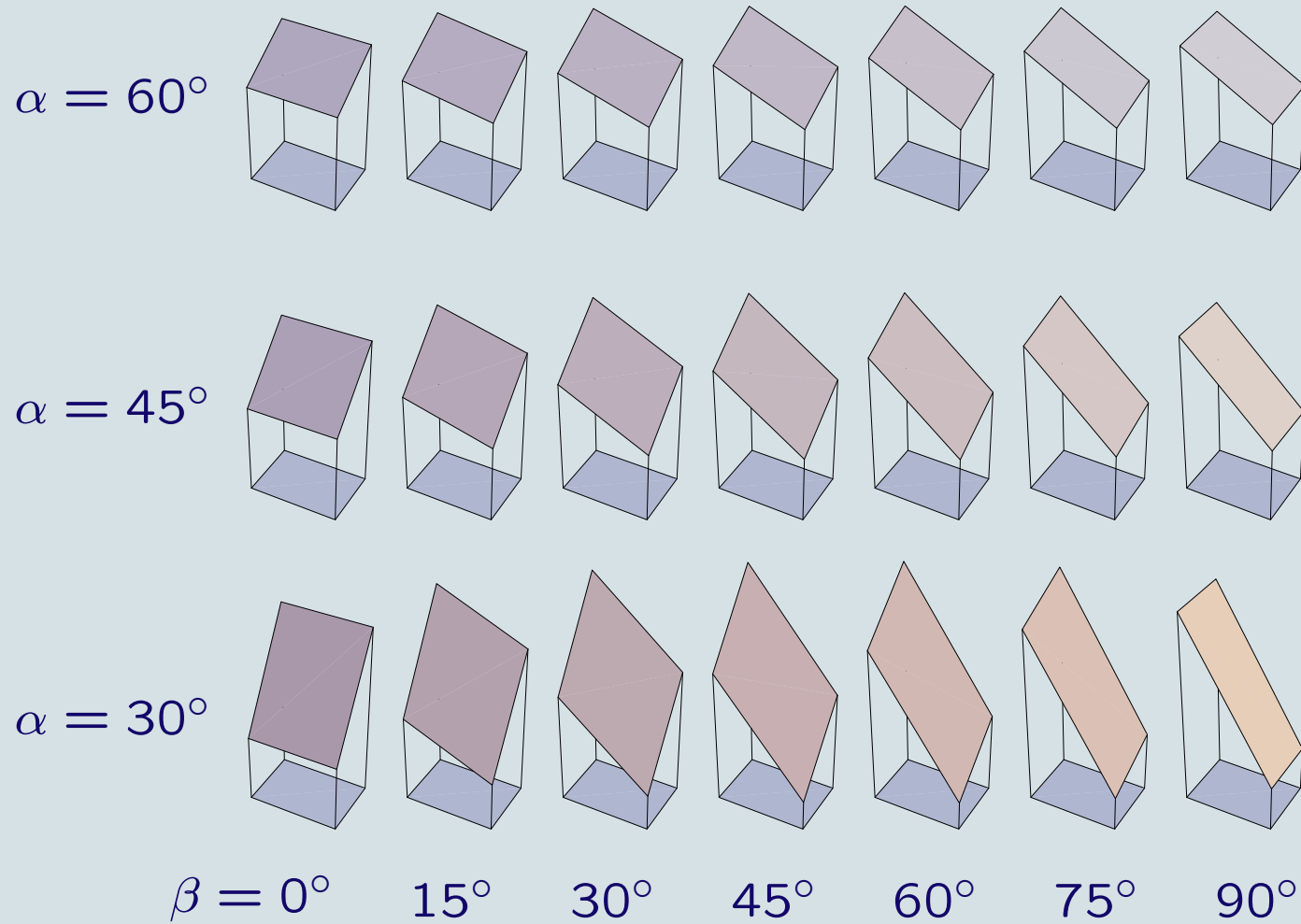


Spatial Mitering

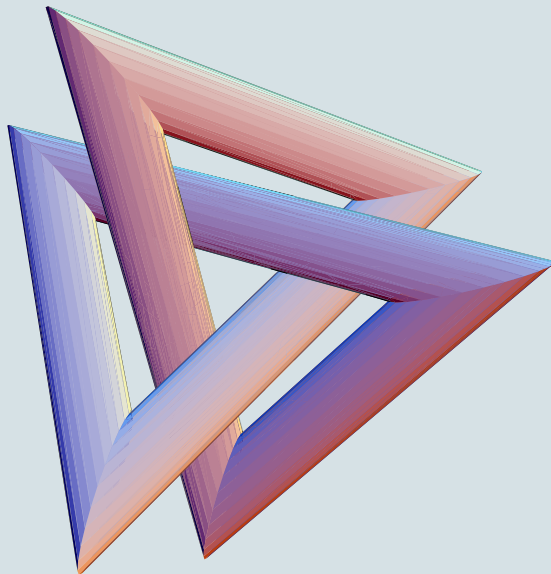


- Aangrenzende balksegmenten spannen een vlak op: **knikvlak**
- **Torsiehoek** = standhoek tussen aangrenzende knikvlakken

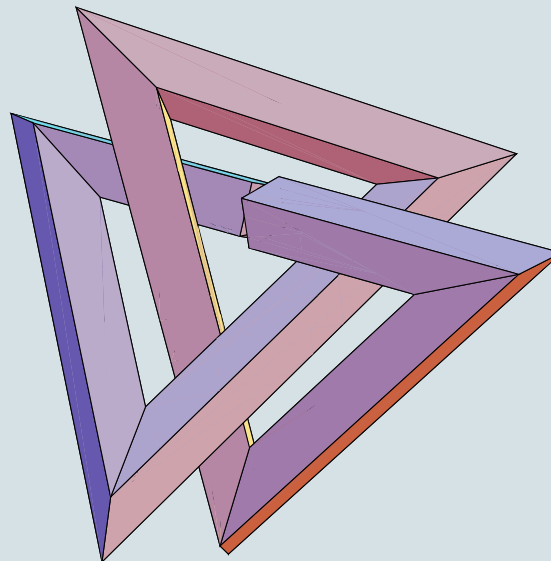
Vorm van zaagvlak bij gegeven dwarsdoorsnede van balk



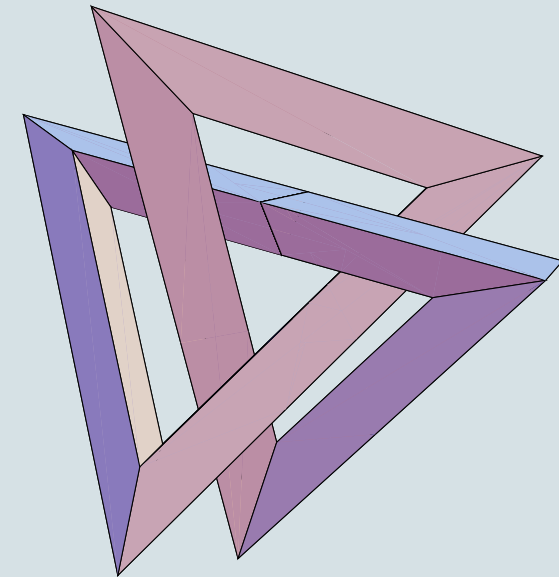
Verstek dat (niet) netjes sluit



Rond profiel



Vierkant profiel



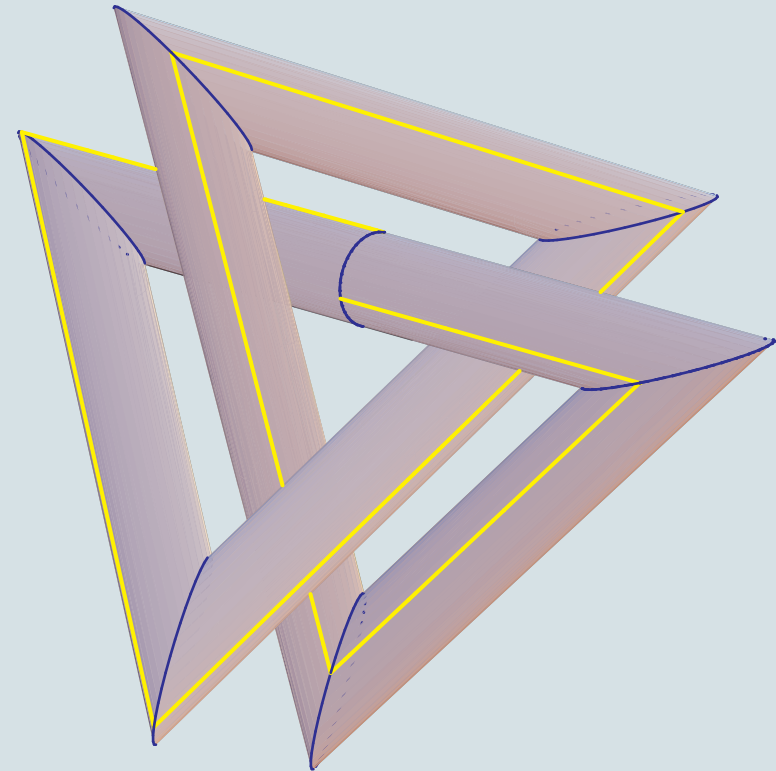
Driehoekig profiel

Verstekstelling

Mate van verdraaiing van het profiel bij rondgang is een inherente eigenschap van het pad en hangt *niet* af van

- keuze van eerste segment
- initiële verdraaiing van profiel om hartlijn
- vorm van profiel

Totale torsie = som van torsiehoeken



Verstek sluit \iff totale torsie is symmetrie van profiel

Hamiltonpad op afgeknotte octaeder



Rechte-hoeken kampioen



Klaverknoop

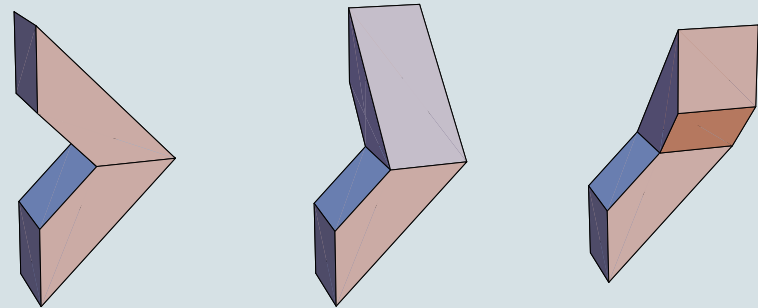


Vroege werk (laat 1980): Karakteristieken

- Gesloten polygonale paden gemaakt met een beperkt stel stukjes
1 : $\sqrt{2}$ -rechthoekige balk afgezaagd onder 45°

Trapezium of parallellogram

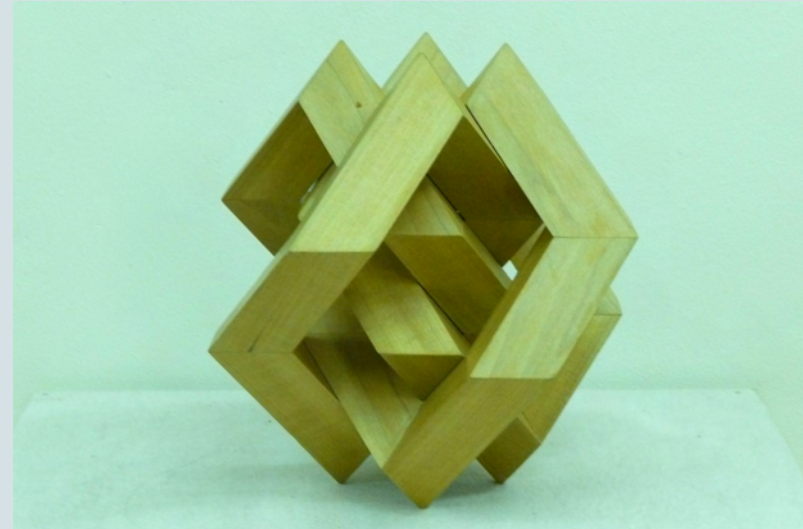
- Alle zaagsnedes zijn vierkant
- Gebruikt ook **dwarsverstek**



- Hoekpunten beperkt tot het FCC rooster; hoeken zijn 90° of 120°
- **Bij elke verbinding sluiten de naden netjes aan**

Dat laatste is triviaal voor gesloten paden opgebouwd uit deze elementen.

Trinity, Vier-eenheid, Hopeloze liefde I & II



Karakteristieken

Ook “polylinks”: verstrengelde polygonale paden

Balkprofiel: $1 : \sqrt{2}$ -ruit

Zaaghoek: 45°

Zaagvlak: vierkant

Hoeken: 90° (regular), 120° (dwars)

Zelfde rooster als bij $1 : \sqrt{2}$ rechthoekige balk

Segmenten kunnen vlak tegen elkaar liggen

Hamiltonpad op cuboctaeder



Hamiltonpad op cuboctaeder

12 segmenten; hoekpunten van cuboctaeder

Balkprofiel: parallellogram

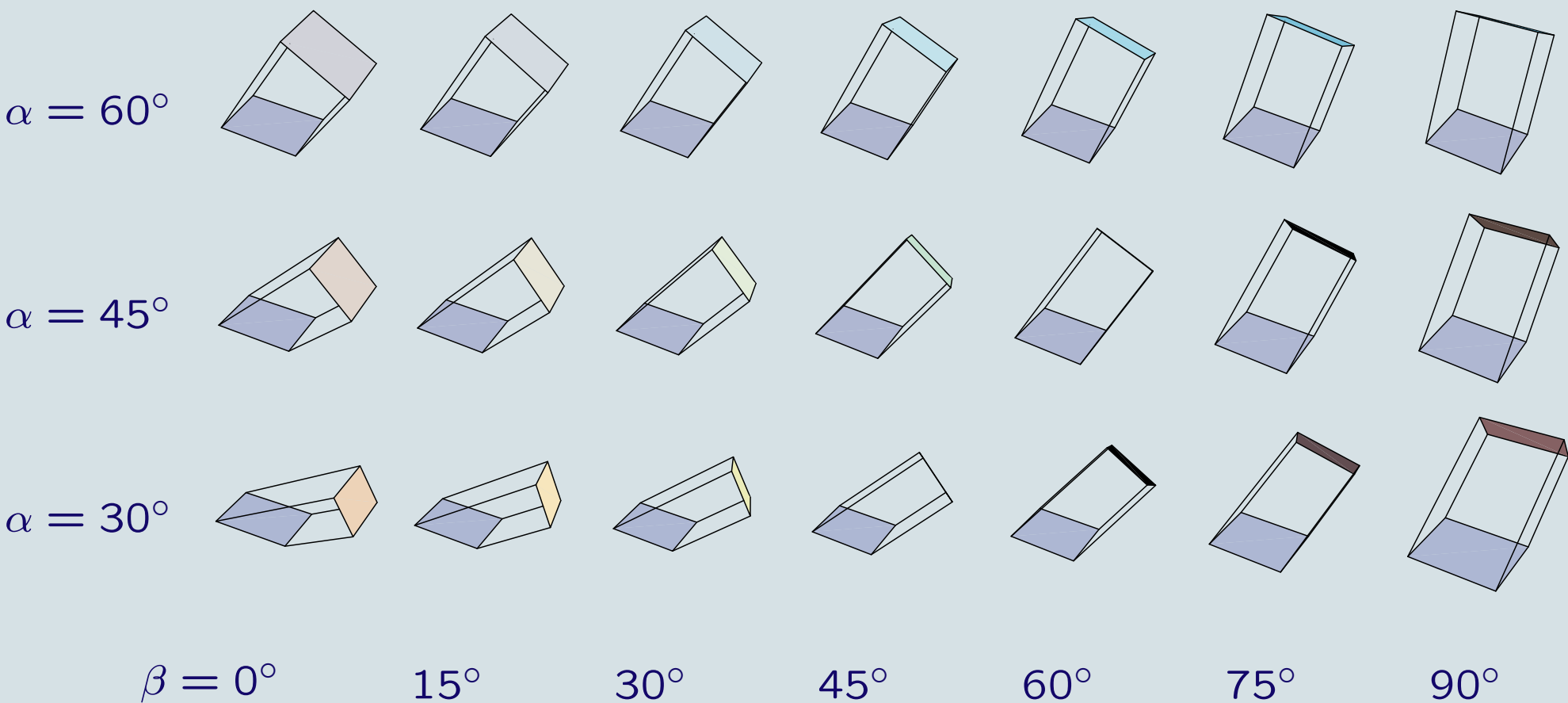
Zaakhoek: $\alpha = 30^\circ$, $\beta = \arctan \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 35.26 \dots^\circ$

Zaagvlakken: $1 : \sqrt{2}$ -rechthoek

Hoeken: 60° (gewoon verstek) and 120° (dwarsverstek, vlak)

0° Möbiusdraai

Vorm van dwarsdoorsnede varieert bij gegeven zaagvalk



Karakterisatiestelling van mogelijke verstekhoeken

Laat balk B een profiel S en zaagvlak F hebben.

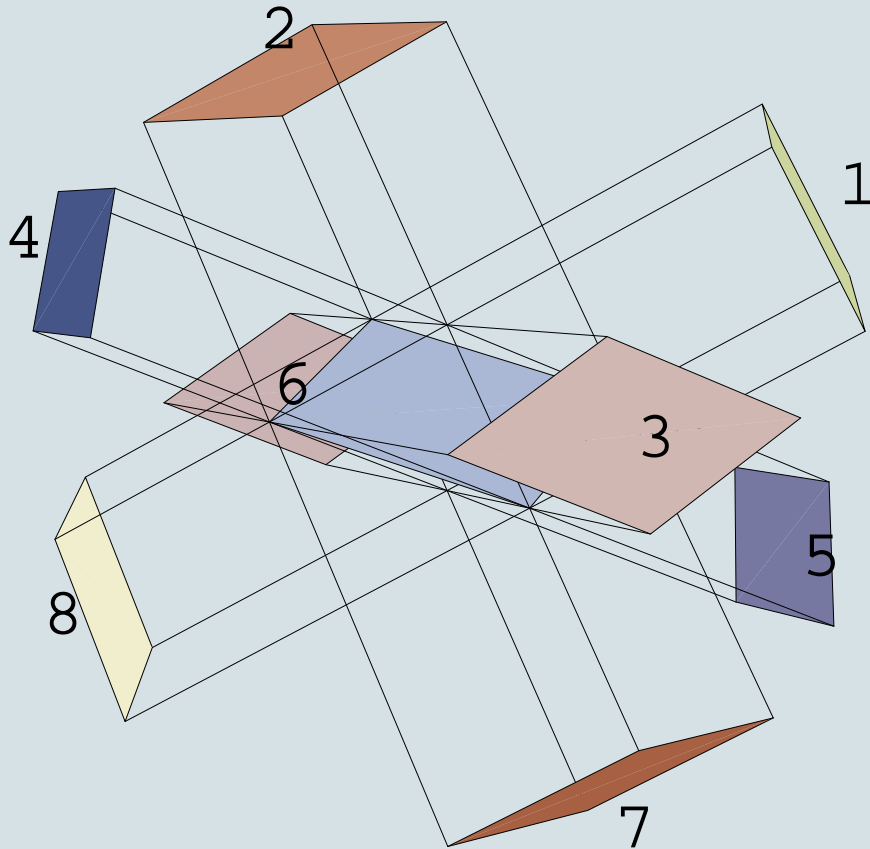
De verzameling balken met dwarsdoorsnede S en zaagvlak F die passende verstekaansluitingen vormen met B tegen F

bestaan precies uit

de balken die je verkrijgt uit B en het verlengde ervan door F d.m.v. het toepassen van de symmetrieën van F

Symmetrieën zijn in 3D, inclusief spiegeling in het vlak dat F bevat.

1 : $\sqrt{2}$ rechthoek als zaagvlak



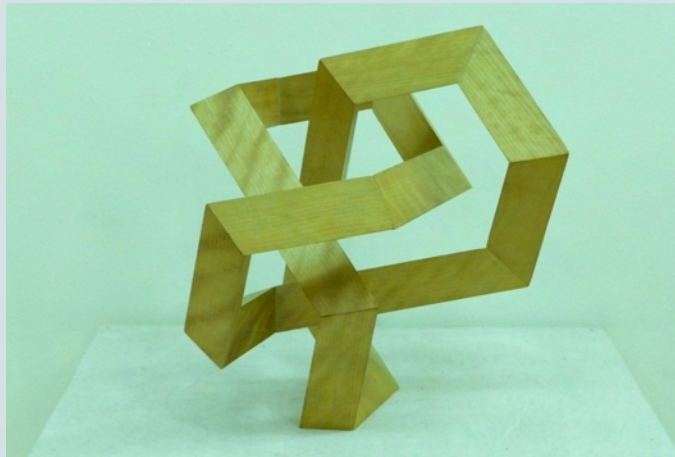
<i>Verb.</i>	<i>Type</i>	<i>Hoek</i>
7-3	gew. verstek	60°
7-1	dwarsverstek	90°
7-4	dwarsverstek	120°
7-6	gew. vouw	120°
7-5	dwarsvouw	60°
7-8	dwarsvouw	90°
7-2	rechtdoor	180°

Drie technieken om torsie te beheersen

'Prutsen'



Roosterwandelen



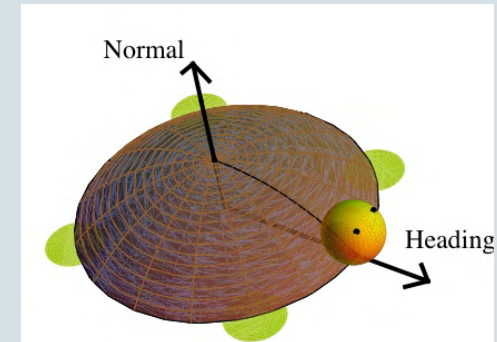
Constance torsie



3D schildpad meetkunde (Turtle Geometry)

Toestand :

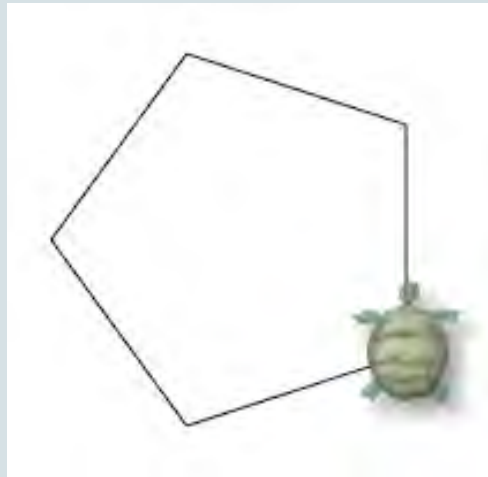
- Positie in de ruimte
- Houding = (richtingsvector, normaalvector)



Commando's :

- $Move(d)$: beweeg afstand d langs richtingsvector
- $Turn(\varphi)$: draai over hoek φ om normaalvector
- $Roll(\psi)$: rol over hoek ψ om richtingsvector

Regelmatige vlakke veelhoeken



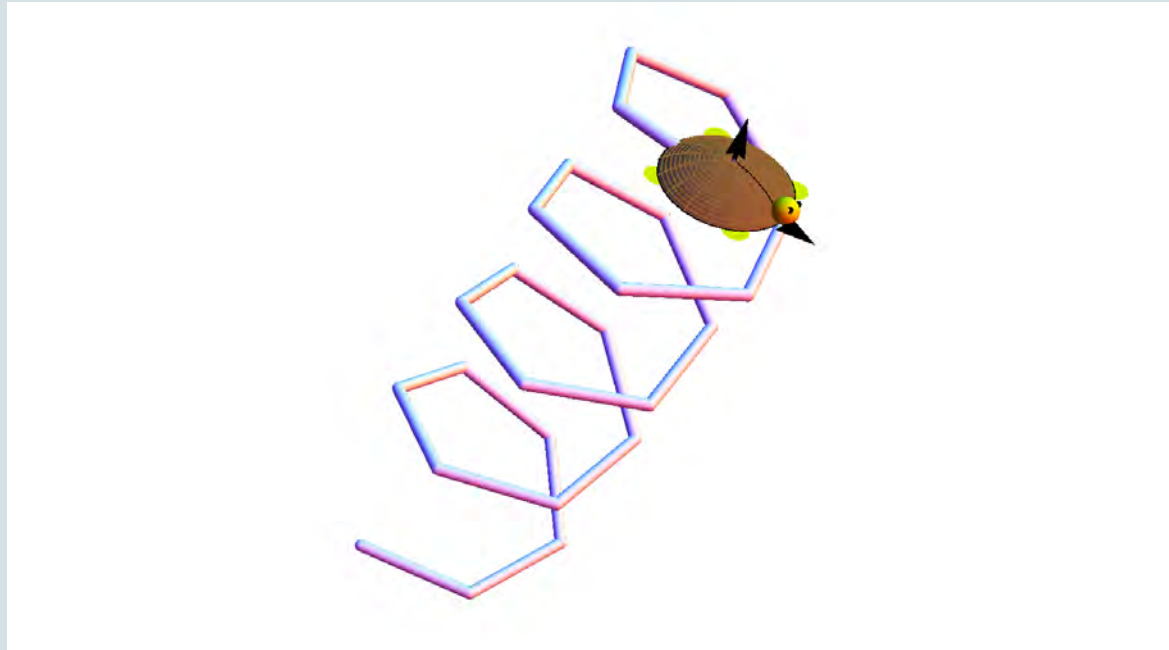
- Alle segmenten hebben dezelfde lengte
- Alle knikhoeken zijn hetzelfde, nl. $180^\circ - 360^\circ/N$

Logo programma: `Repeat N [Forward 100 Left 360 / N]`

Generalisatie naar 3D

In 3D: *Roll* biedt extra vrijheid

Alle *Roll*-hoeken gelijk — $Roll(\psi)$ — levert een **spiraal**, die nooit sluit



Extra eis: Alle torsiehoeken zijn hetzelfde (in absolute waarde)

Constate-Torsie Polygonen

Definieer

$$\text{Segment}(d, \psi, \varphi) = \text{Move}(d) ; \text{Roll}(\psi) ; \text{Turn}(\varphi)$$

Constate-Torsie (CT) pad: geproduceerd door rij van $\text{Segment}(d_i, \psi_i, \varphi_i)$ met alle $|\psi_i| = \psi$, alle $d_i > 0$, en alle $\varphi_i \neq 0 \pmod{180^\circ}$

Regelmatig pad: alle $d_i = d$ and $\varphi_i = \varphi$ for $0 < \varphi < 180^\circ$

CT polygoon: netjes gesloten CT pad

Schildpad programma heet **netjes gesloten** wanneer schildpad eindigt in initiële toestand, d.w.z. initiële positie *en* initiële houding

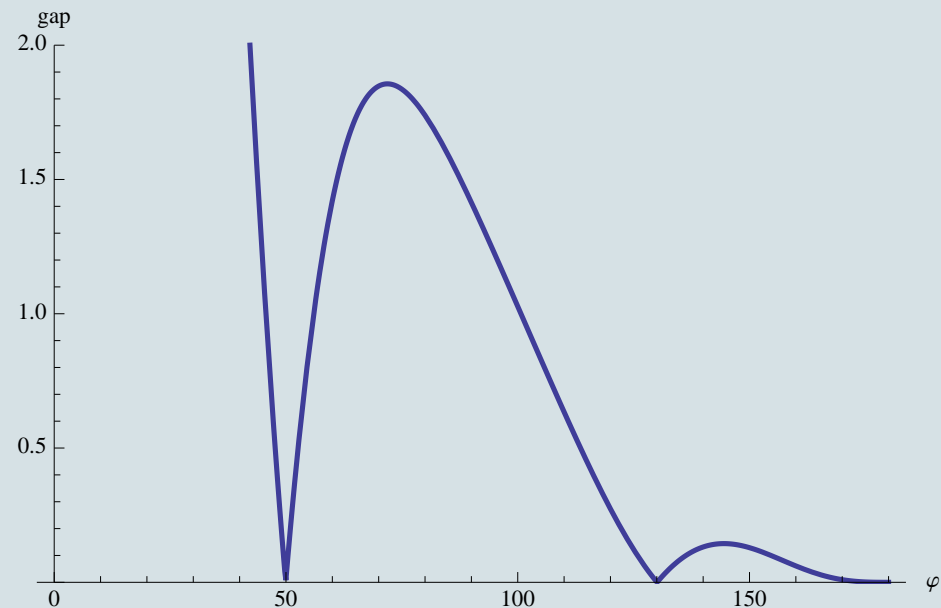
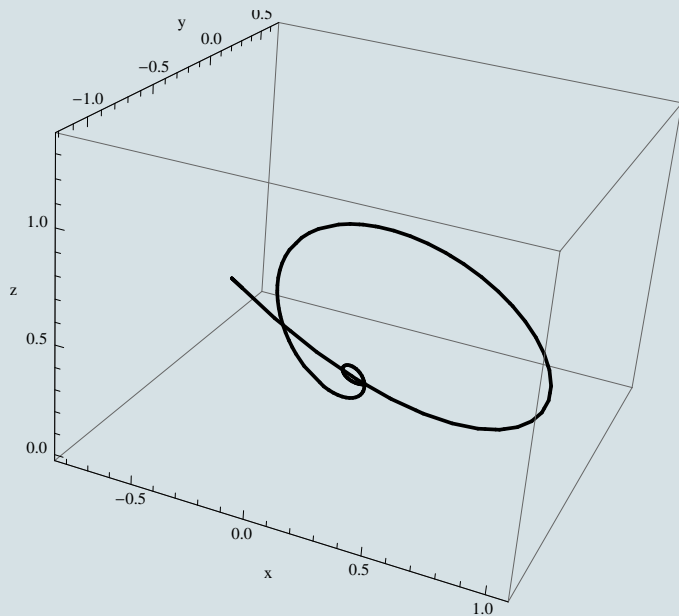
CT polygoon is bepaald door d, ψ, φ en de rij van rol-*tekens*

Constructie van CT Polygonen

Existentie van tekenrij en waarden van hoeken ψ, φ niet evident

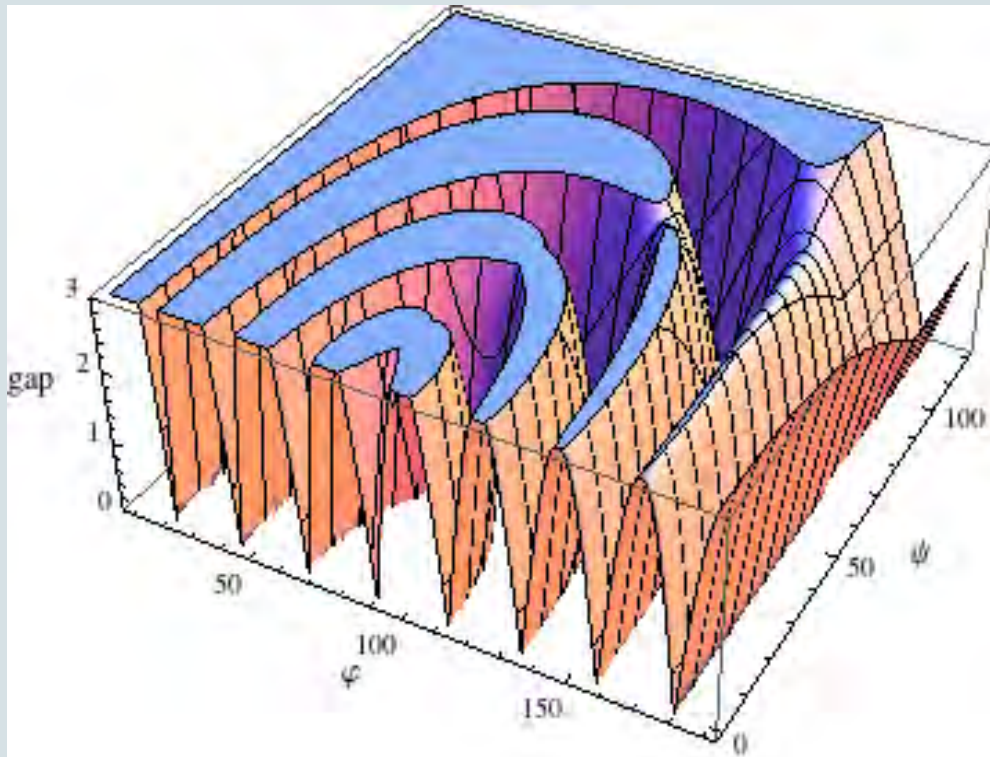
Methode: Kies tekenrij en één van ψ of φ , bepaal dan de andere hoek

Bijv.: Gegeven tekenrij $(++--)^4$, $\psi = 90^\circ$, bepaal φ voor sluiting

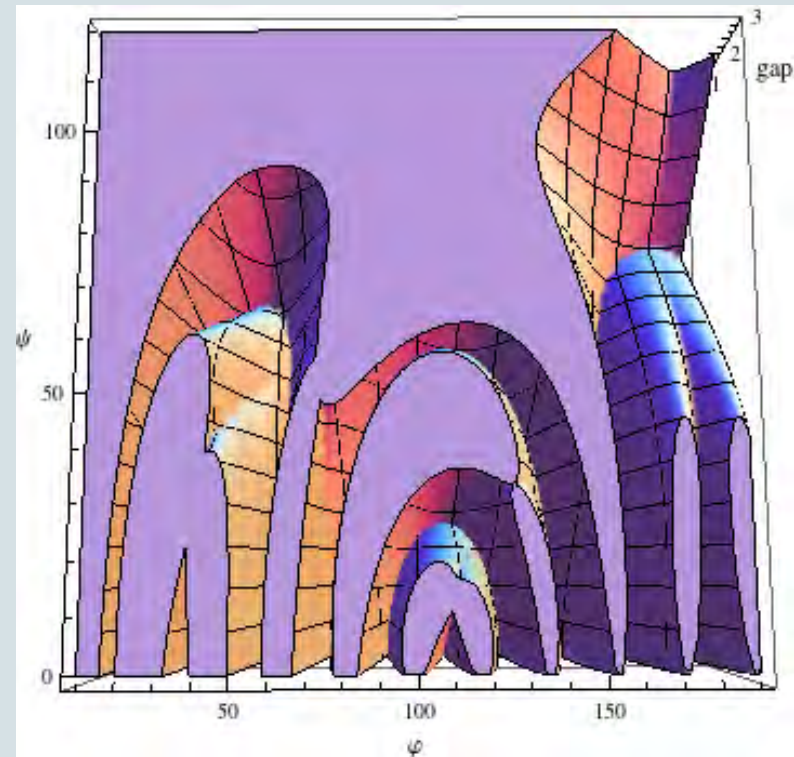


ϕ - ψ Landschappen

++---++---++---++---
16 segmenten



++---++---++---++---++---
20 segmenten



Eigenschappen van Regelmatige Constante-Torsie Polygonen

Afstand tussen hoekpunten met k segmenten ertussen is constant voor $k = 1, 2, 3$

$$\text{Totale torsie} = \sum_{i=1}^n \psi_i \equiv 0 \pmod{\psi}$$

Gevolg: Verstek sluit $\iff \psi$ is symmetrie van profiel

Bij vierkant profiel is $\psi = 90^\circ$ praktisch

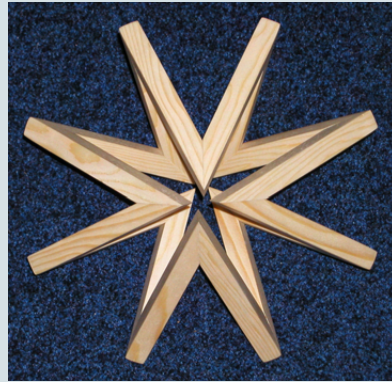
Slechts twee verschillende stukjes, elkaars spiegelbeeld

Kunstwerken

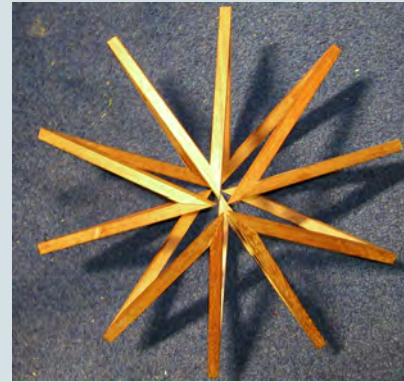
$(+++--)^3$



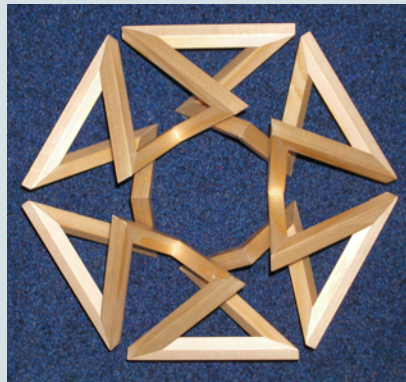
$(+++--)^4$



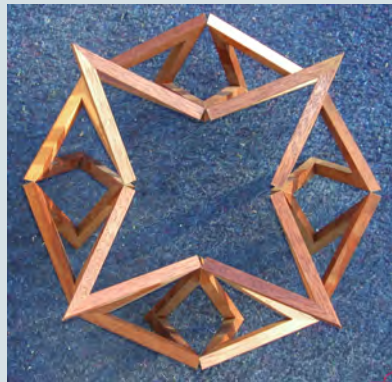
$(+++--)^5$



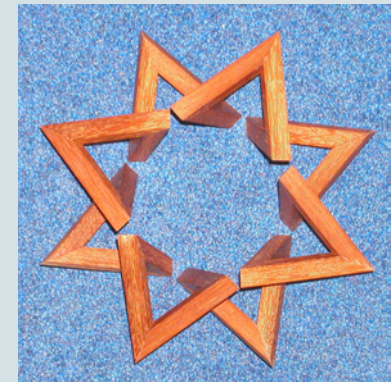
$(++++--)^3$



$(+++-----)^3$



$(++++-----)^4$



$(++++--)^4$

Tot slot

Thema van deze lezing:

- Gesloten lineaire (niet-vertakkende) polygonale structuren
- Alle balken hebben dezelfde dwarsdoorsnede
- Verbinden met verstek

Andere thema's:

- Vouwen i.p.v. verstek
- Vertakken, schalen
- Continue vormen



Referenties

www.win.tue.nl/~wstomv/publicaties

Proceedings of the *Bridges* Conferences: www.bridgesmathart.org

International Journal of Arts and Technology (IJART)

Journal of Mathematics and the Arts (JMA)

Mathematica Demonstration Projects: demonstrations.wolfram.com

- Miter Joint and Fold Joint
- Mitering A 3D Closed Path
- 3D Flying Pipe-laying Turtle