

# Ondernemen = Kiezen = Spelen

---

Lezing op het *Nationaal T&U Congres*  
9 oktober 2008



*Tom Verhoeff*

**TU/e** Technische Universiteit  
**Eindhoven**  
University of Technology

Faculteit Wiskunde & Informatica

## Eerste spel: Cijfers kiezen

---



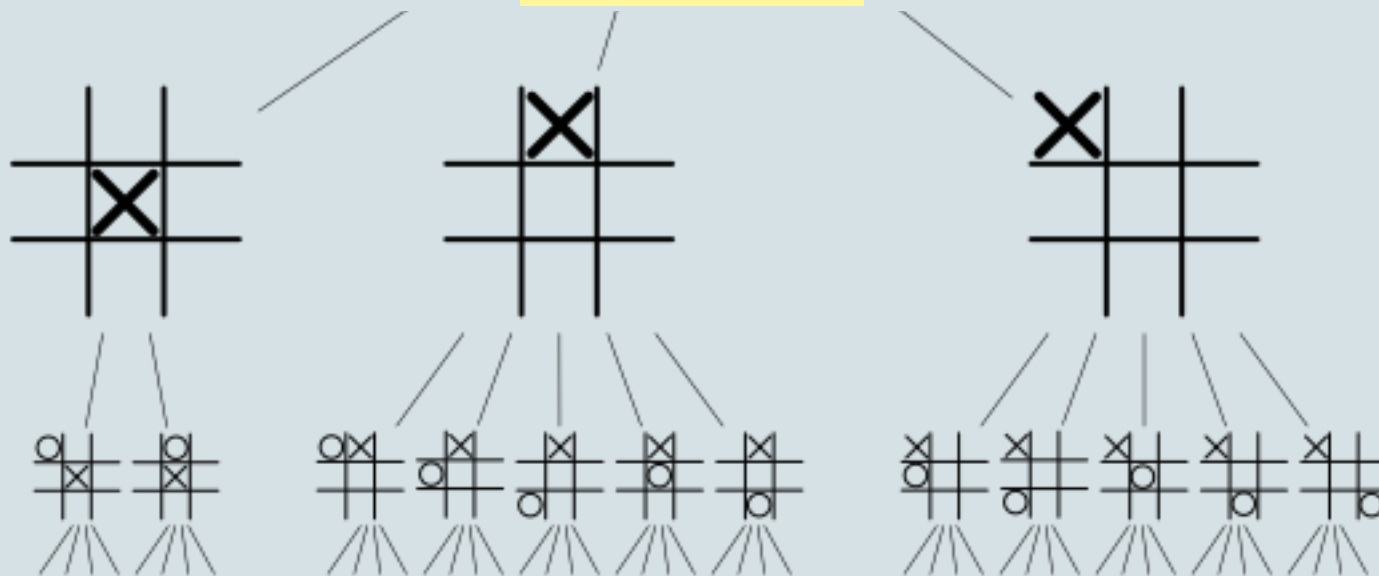
Twee spelers: Kies om de beurt een cijfer.

Eerder gekozen cijfers zijn niet meer beschikbaar.

**Doel:** Als eerste *drie* cijfers gekozen hebben die samen **15** zijn.

# Logisch combineren

6	1	8
7	5	3
2	9	4



Analyse kan heel lastig zijn!

## Tweede spel: Kop of munt kiezen

Bob kiest

0 1

Alice kiest

0 1

0	↑ 1	← 2
1	← 2	↑ 3

Opbrengst

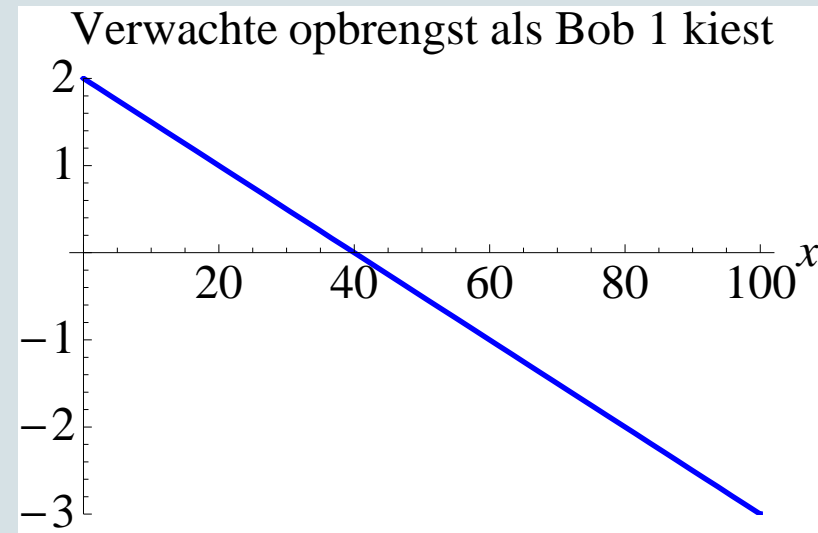
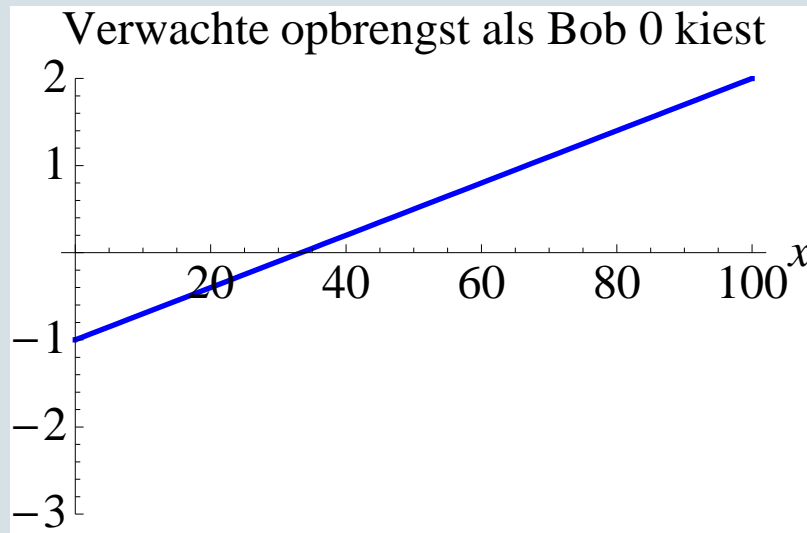
Twee spelers: Elk kiest **0** (kop) of **1** (munt), *geheim* voor ander.

**Doel:** Opbrengst maximaliseren bij herhaaldelijk spelen.

## Strategisch bluffen: De gemengde strategie

Analyse voor Alice: zij kiest 1 met kans  $x\%$ .

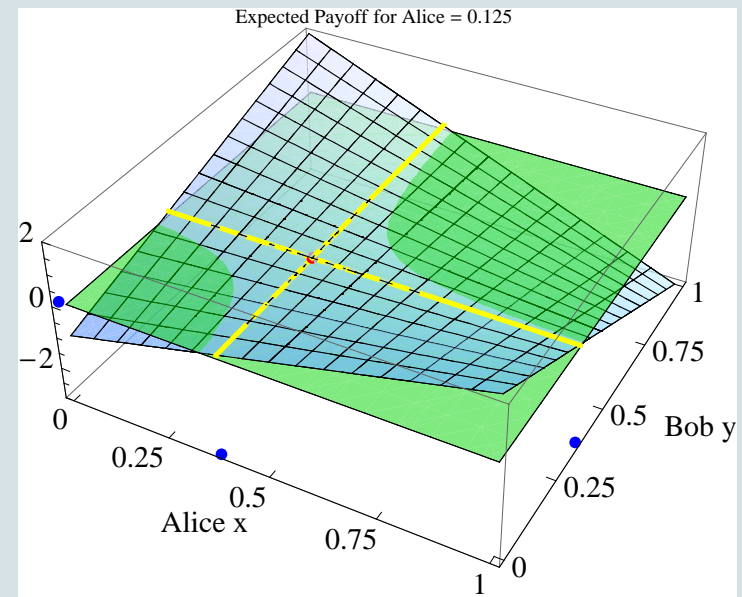
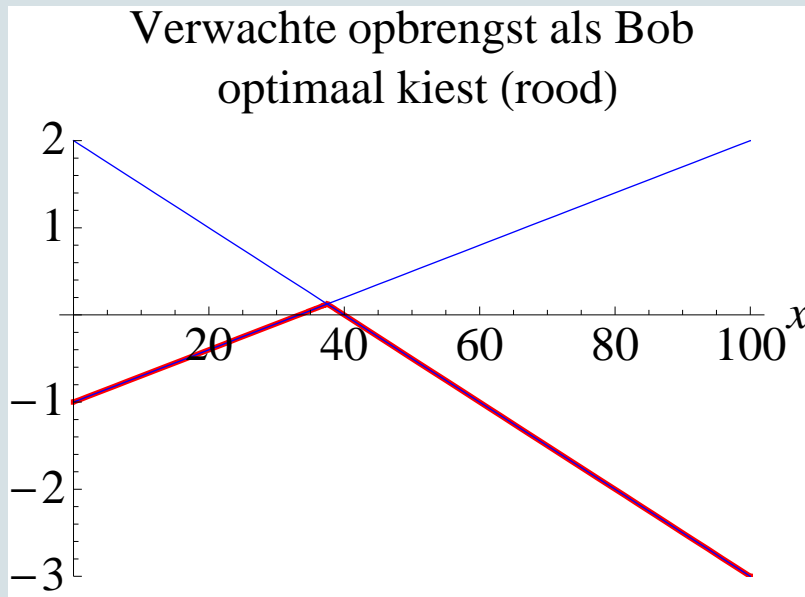
Alice wil  $x$  optimaal vaststellen, niet wetende wat Bob kiest.



Verwachte opbrengst =  $+0,5$   
voor  $x = 50\%$

Verwachte opbrengst =  $-0,5$   
voor  $x = 50\%$

## Strategisch bluffen: Het Nash evenwicht



Optimaal voor Alice:

kies 0 met kans  $5/8$  en kies 1 met kans  $3/8$

Verwachte opbrengst voor Alice:  $+0,125$  ofwel  $6\frac{1}{4}\%$  van 2

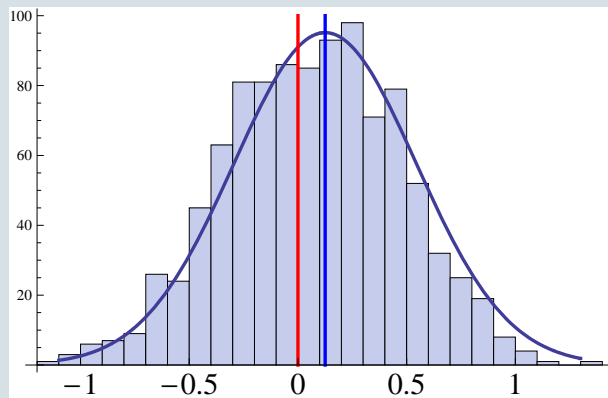
Dit is bovendien onafhankelijk van wat Bob kiest.

## Het effect van spreiding

Verwachte opbrengst  $\mu = 0,125$  met spreiding van  $\sigma = 1,884$

Driemaal 1000 experimenten

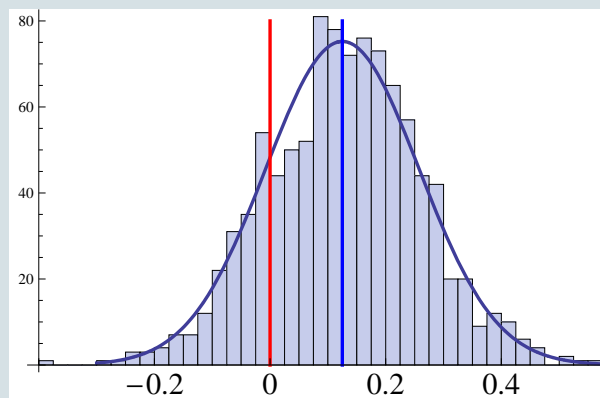
20 herhalingen



$$\sigma = 0,42$$

38% kans op verlies

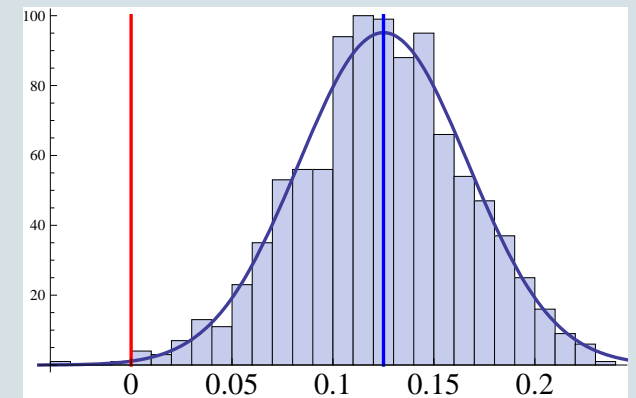
200 herhalingen



$$\sigma = 0,13$$

17% kans op verlies

2000 herhalingen



$$\sigma = 0,04$$

0,1% kans op verlies

## Derde spel: Categorieën kiezen

---



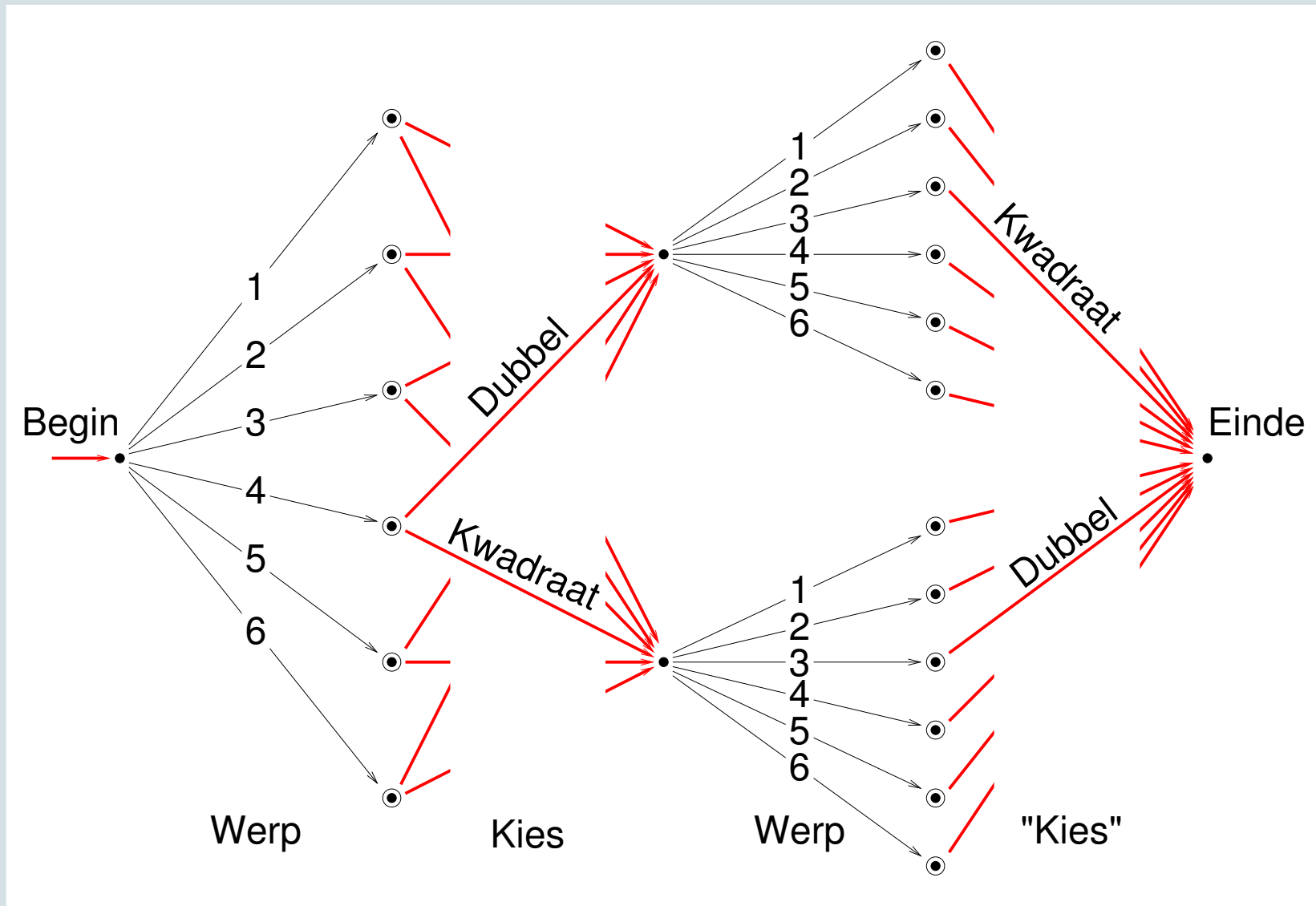
Categorie	Score
<i>Dubbel</i> (ogen + ogen)	...
<i>Kwadraat</i> (ogen × ogen)	...
<i>Totaal</i>	...

Eén speler: Werp dobbelsteen, kies *vrije* categorie, herhaal.

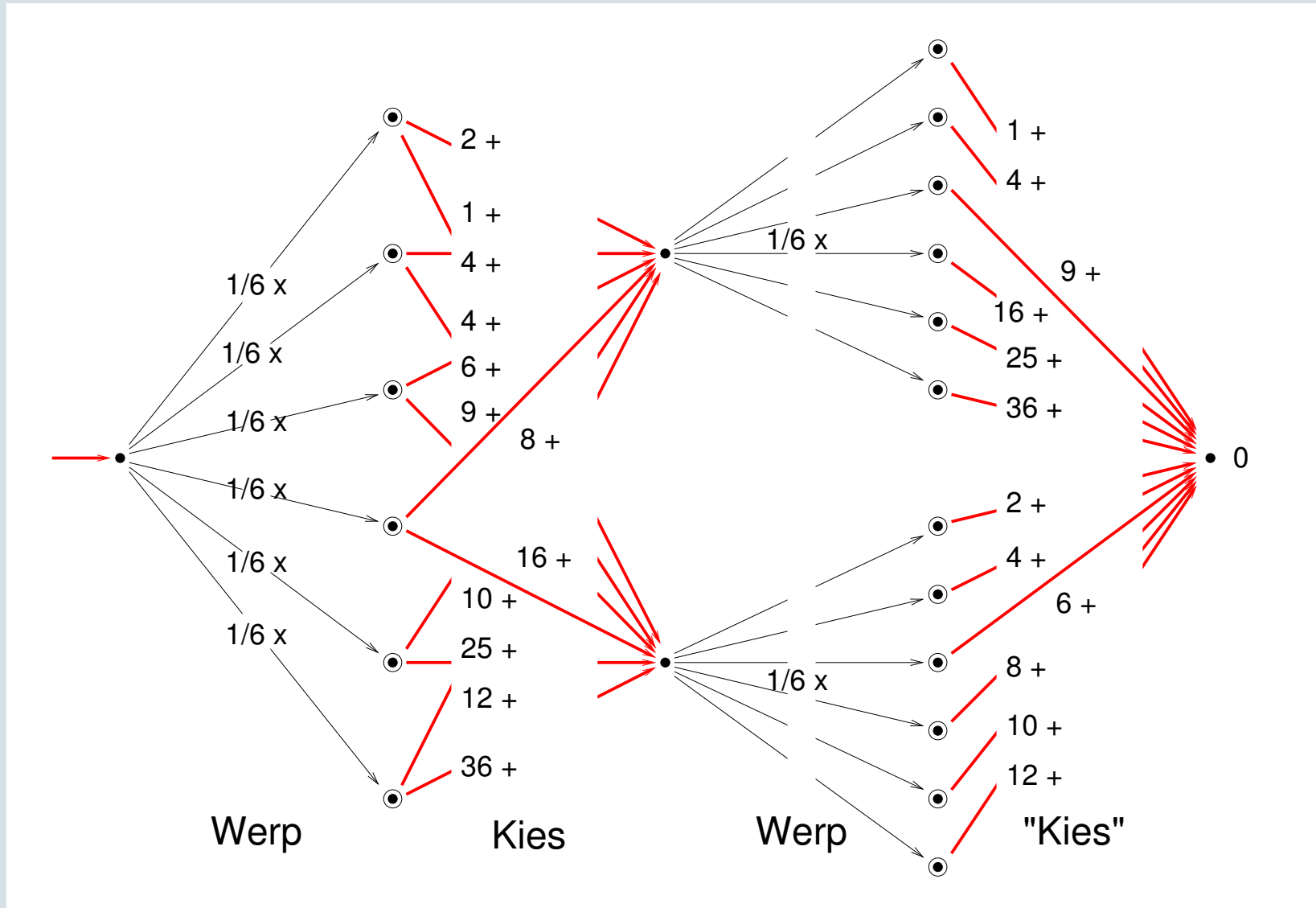
**Doel:** Totaalscore maximaliseren bij herhaaldelijk spelen.



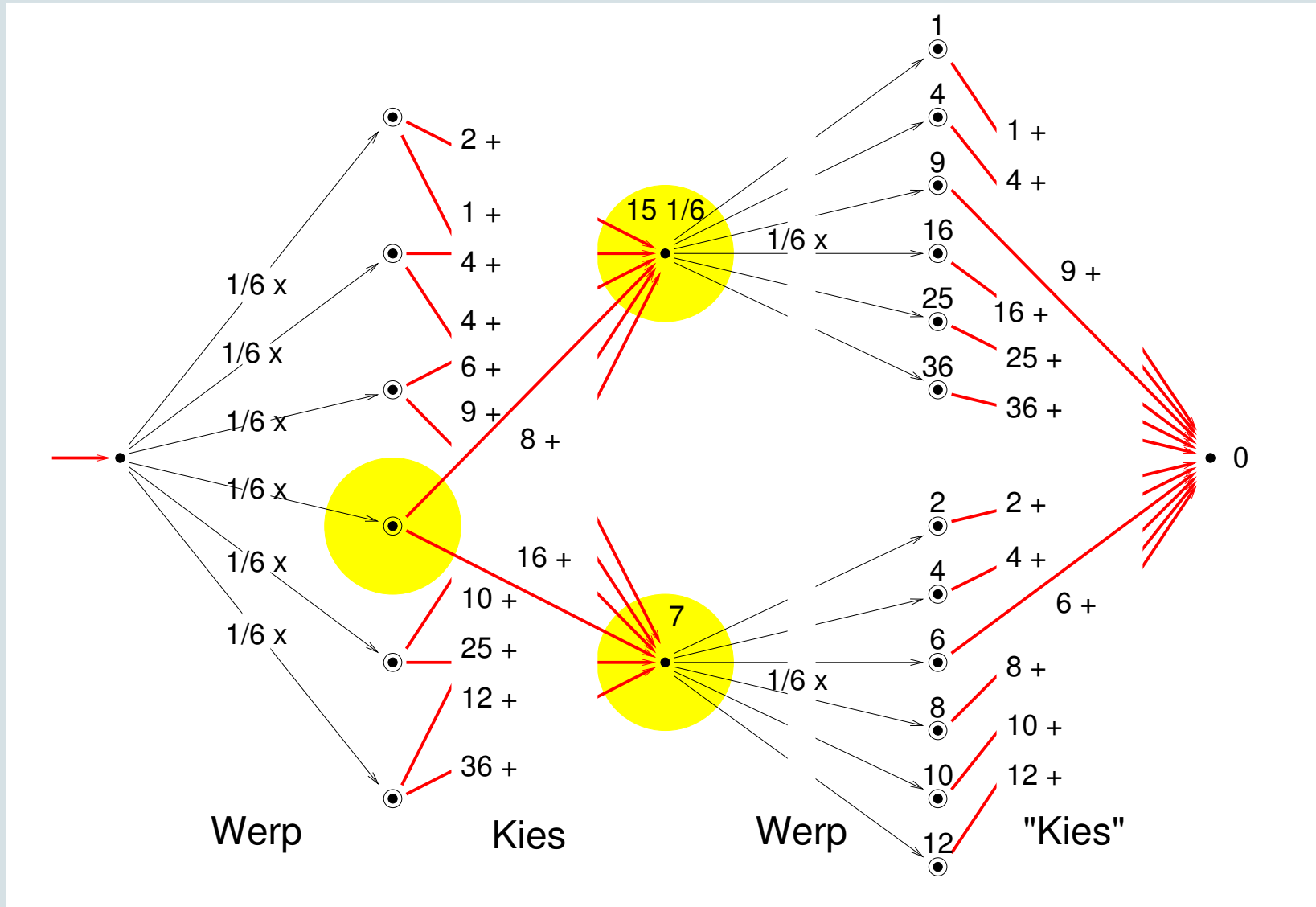
# Kansen afwegen: microYahtzee spelgraaf



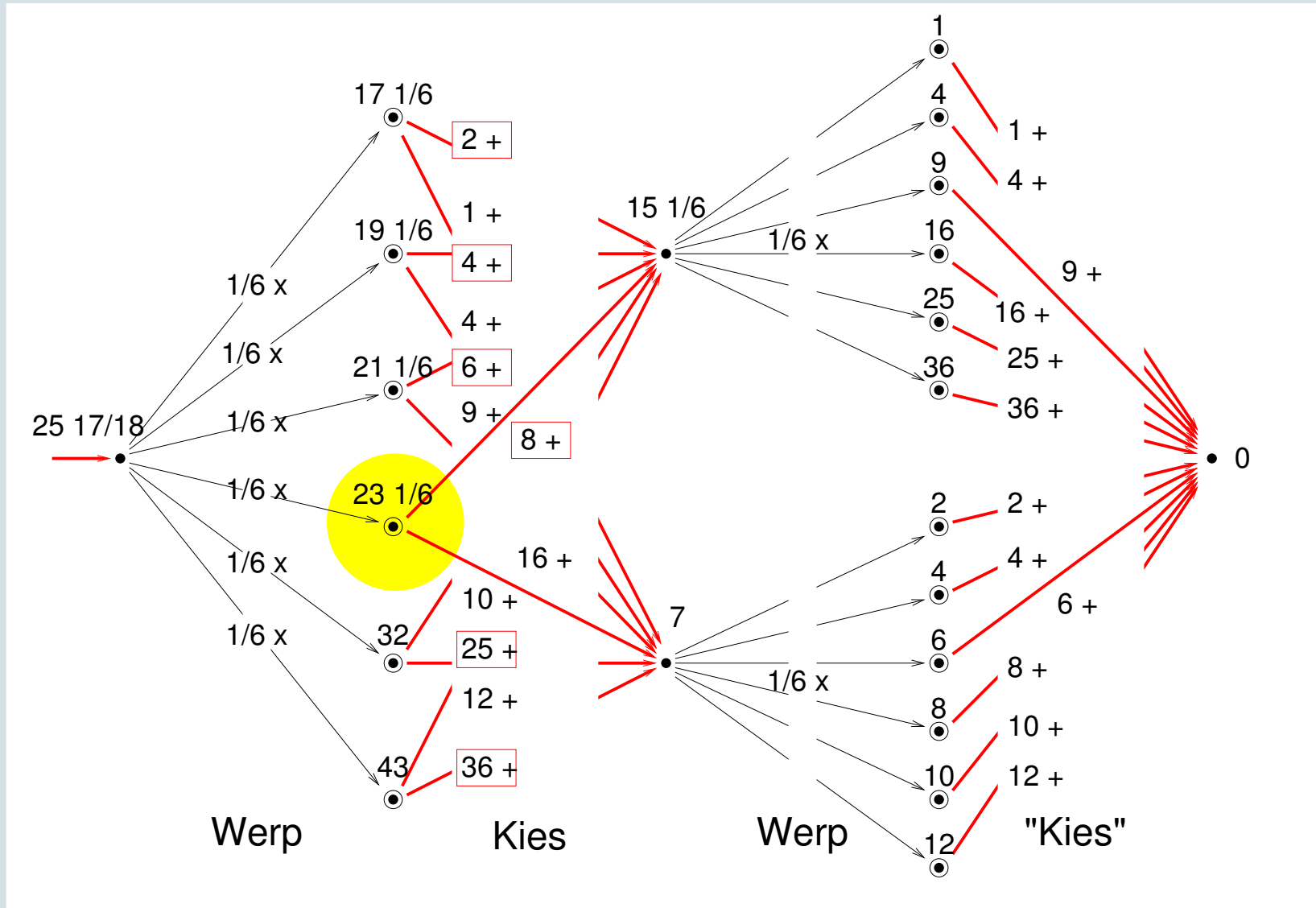
# Kansen afwegen: microYahtzee verwachte scores



# Kansen afwegen: microYahtzee optimale scores



# Kansen afwegen: microYahtzee dilemma opgelost



## Kansen afwegen: ‘echt’ Yahtzee







- Scorekaart met 13 categorieën en 5 dobbelstenen
- $39 \times$  kiezen: meer dan één miljard toestanden
- Verwachte totaalscore bij optimaal spel: 254, ... [Verhoeff, 1999]

Maar spreiding is hoog:  $\pm 60$  (70% in 200–300)

- On-line advies en oefenen:

[www.win.tue.nl/~wstomv/misc/yahtzee](http://www.win.tue.nl/~wstomv/misc/yahtzee)

# Yahtzee

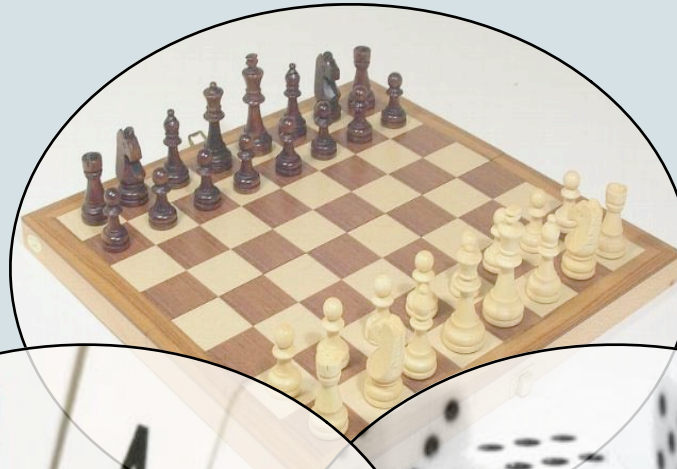
UPPER SECTION	HOW TO SCORE	GAME #1	GA #
Aces  = 1	Count and Add Only Aces		
Twos  = 2	Count and Add Only Twos		
Threes  = 3	Count and Add Only Threes		
Fours  = 4	Count and Add Only Fours		
Fives  = 5	Count and Add Only Fives		
Sixes  = 6	Count and Add Only Sixes		
<b>TOTAL SCORE</b>	→		
<b>BONUS</b> <small>If total score is 63 or over</small>	SCORE 35		
<b>TOTAL</b> <small>Of Upper Section</small>	→		
LOWER SECTION			
3 of a kind	Add Total Of All Dice		
4 of a kind	Add Total Of All Dice		
Full House	SCORE 25		
Sm. Straight <small>Sequence of 4</small>	SCORE 30		
Lg. Straight <small>Sequence of 5</small>	SCORE 40		
YAHTZEE <small>5 of a kind</small>	SCORE 50		
Chance	Score Total Of All 5 Dice		
<b>YAHTZEE BONUS</b>	✓ FOR EACH BONUS		
	SCORE 100 PER ✓		
<b>TOTAL</b> <small>Of Lower Section</small>	→		
<b>TOTAL</b> <small>Of Upper Section</small>	→		
<b>GRAND TOTAL</b>	→		

©1982, 1990, 1996 Milton Bradley Company. All Rights Reserved

## Drie soorten situaties om in te kiezen

---

Logisch combineren (volledige informatie)



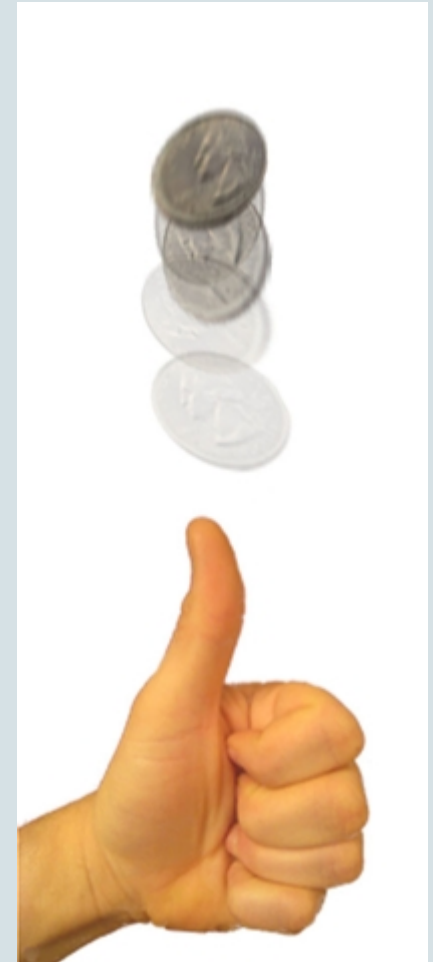
Strategisch bluffen (geheimen)

Kansen afwegen (onzekerheid)

## Wijze lessen

---

1. 'Speelse' wiskundige technieken kunnen helpen bij het maken van goede keuzes in diverse situaties.
2. Bij herhaalde strategische keuze kan het optimaal zijn om een (goed afgewogen) munt te tossen (de zogenaamde *gemengde Nash strategie* voorkomt voorspelbaarheid en uitbuiten).
3. Bij herhaalde geluksbeproeving kan het optimaal zijn een (goed afgewogen) vaste keuze te maken (de zogenaamde *Markov beslissingsprocessen*).
4. Bij grote spreiding is een lange adem vereist voor meer zekerheid (vanwege de factor  $1/\sqrt{N}$ ).





**Beslis speels, raadpleeg eens een wiskundige!**

**TU/e** Technische Universiteit  
Eindhoven  
University of Technology

