Oneindig (als getal)

Tom Verhoeff

Technische Universiteit Eindhoven
Faculteit Wiskunde en Informatica

T.Verhoeff@TUE.NL
http://www.win.tue.nl/~wstomv/

Bijzondere getallen

Er zijn **DRIE** soorten wiskundigen:

- zij die kunnen tellen en
- zij die dat *niet* kunnen

Ik zal proberen in eindige tijd wat te vertellen over oneindig

© 2002, T. Verhoeff Oneindig–1

. . .

Getallen

Belang van getallen: wetenschap, economie, maatschappij

Niet-wiskundige boeken over getallen:
geschiedenis, filosofie, antropologie, psychologie, mystiek

Natuurkunde: (on)eindigheid van ruimte en tijd

Oneindig in de informatica:
data(structuren), eindiging van 'reken'processen

't Wordt een heel verhaal, u moet wel eens wat voor lief nemen

Top tien van getallen (Clifford Pickover, 2001)

1.	0		
2.	π	$3.141592653\ldots$	Archimedes, Ludolph
3.	e	$2.718281828\ldots$	Napier, Euler
4.	i	$\sqrt{-1}$	Gauss
5.	$\sqrt{2}$	$1.414213562\ldots$	Pythagoras
6.	1		
7.	2		
8.	γ	$0.5772156649\ldots$	Euler, Mascheroni
9.	Ω	*onberekenbaar*	Chaitin
10.	$\aleph_0$	*oneindig*	Cantor

Top tien van getallen (Clifford Pickover, 2001)

Alle getallen hebben wel wat, moeilijk te kiezen

Over 0, π, e, i zijn hele boeken geschreven (populair)

Niet over 1, 2 of $\sqrt{2}$ (voorzover ik weet)

Ook nog interessant:

$$\phi = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right) = 1.6180339887\ldots \quad \text{Gulden Snede, Fibonacci}$$

$$\log 2 = 0.69314718\ldots \quad \text{Mercator}$$

Getallen verzameld

- $\mathbb{N}$ – Natuurlijke getallen: $0,\ 1,\ 2,\ \ldots$
- $\mathbb{Z}$ – Gehele getallen: $\ldots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$
- $\mathbb{Q}$ – Rationele getallen: $\ldots,\ -7\frac{2}{3},\ \ldots,\ \frac{1}{2},\ \ldots,\ \frac{355}{113},\ \ldots$
- $\mathbb{R}$ – Reële getallen: $\ldots,\ \gamma,\ \ldots,\ \sqrt{2},\ \ldots,\ e,\ \ldots,\ \pi,\ \ldots,\ \Omega,\ \ldots$
- $\mathbb{C}$ – Complexe getallen: $\ldots,\ i,\ \ldots,\ \frac{1+i}{\sqrt{2}},\ \ldots$
- Keten van uitbreidingen: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

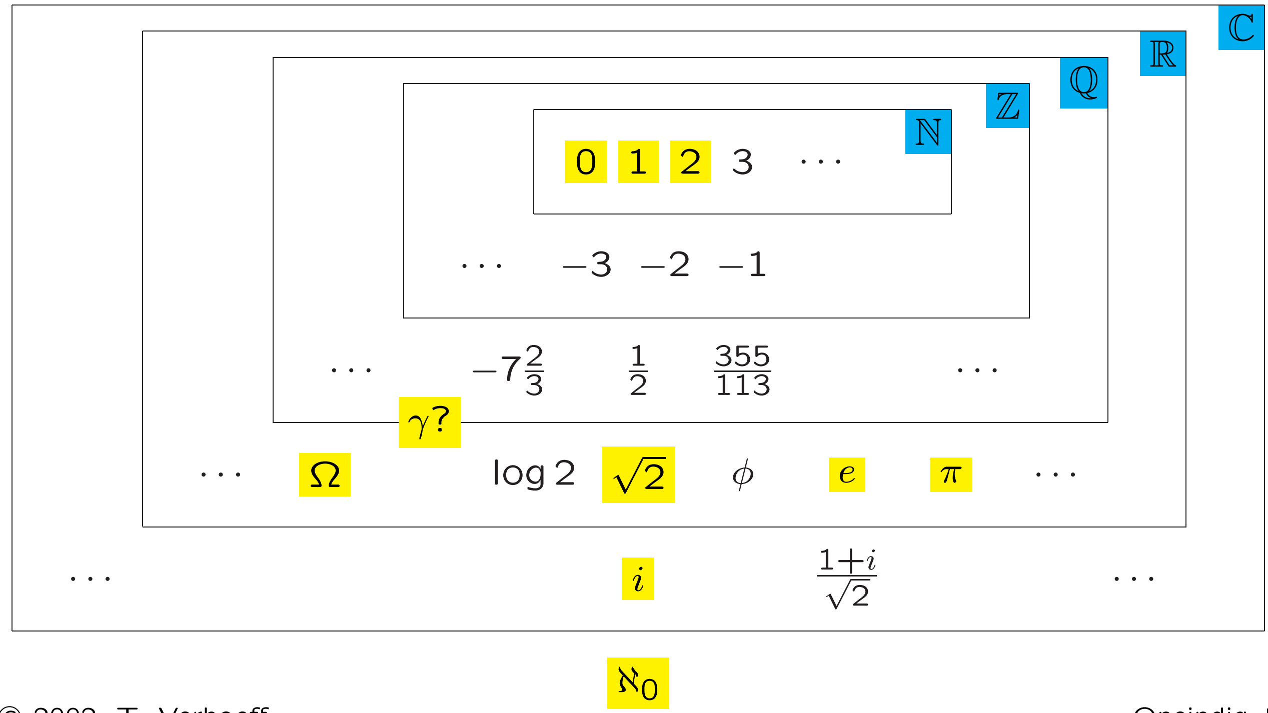
Getallen verzameld

Classificatie

Vergelijk met biologische taxonomie

Soms onenigheid over $0 \in \mathbb{N}$

Geneste verzamelingen van getallen



Geneste verzamelingen van getallen

Volgende verzameling omvat vorige

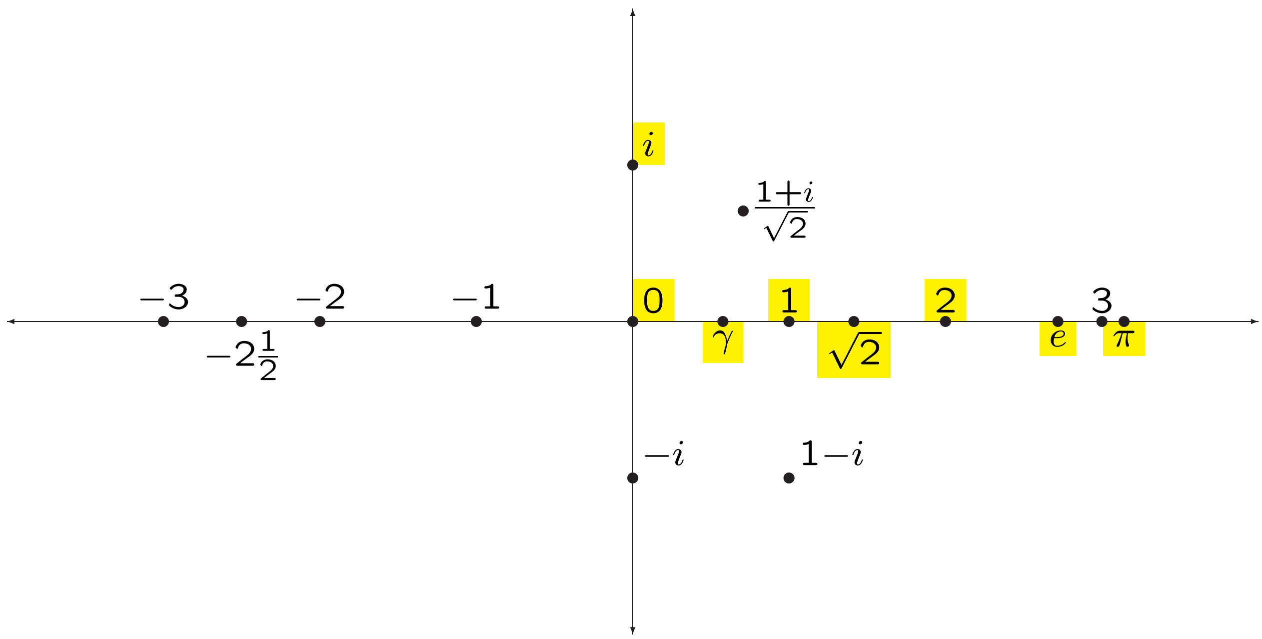
Allemaal oneindig grote verzamelingen (. . .)

Clifford's Top Tien bevat geen getallen uit $\mathbb{Z} - \mathbb{N}$, $\mathbb{Q} - \mathbb{Z}$

$\gamma \in \mathbb{Q}$ onbekend, vermoed wordt $\gamma \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

$\aleph_0 \notin \mathbb{C}$

Getallen als meetkundige punten: topologische structuur



Getallen als meetkundige punten: topologische structuur

Topologische structuur: nabijheid

Meetkundige lijn ($\mathbb{R}$) en vlak ($\mathbb{C}$):

- oneindig uitgestrekt
- oneindig dichtgepakt (dichter dan $\mathbb{Q}$)

Bewerkingen op getallen: algebraïsche structuur

$\mathbb{N}$: $a+b$ (optellen), $a*b$ (vermenigvuldigen), a^b (machtsverheffen)

$\mathbb{Z}$: $a-b$ (aftrekken: $a = x+b$)

$\mathbb{Q}$: a/b (delen: $a = x * b$)

$\mathbb{R}$: $\sqrt[b]{a}$ (worteltrekken: $a = x^b$),

$\log_b a$ (logaritme: $a = b^x$)

$\mathbb{C}$: nulpunten van polynomen, bijv. $x^2 + 1 = 0$

Bewerkingen op getallen: algebraïsche structuur

Eenheidselement, nulelement, inverse, associatief, distributief

Ordening

Uitbreiding met doel bewerkingen gesloten te maken
ofwel bepaalde (algebraïsche) vergelijkingen oplosbaar te maken
$\mathbb{Z}$ (schulden, debet); $\mathbb{Q}$ (taart delen)

Machtsverheffen in $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Q}$: $b \in \mathbb{N}$
Machtsverheffen in $\mathbb{R}$: $b \in N \lor a > 0 \lor (-b \in \mathbb{N} \land a \neq 0)$
Delen in $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$: $b \neq 0$
Worteltrekken in $\mathbb{R}$: $a > 0$
Logaritme in $\mathbb{R}$: $a > 0$ en $b > 0$
Logaritme in $\mathbb{C}$: $a \neq 0$ en $b \neq 0$ en $|b| \neq 1$

Potentieel oneindige processen (...)

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + - \ldots$$

$$\frac{2}{\pi} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdot \ldots$$

$$e = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots$$

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}$$

Potentieel oneindige processen (...)

Reële getallen als limiet van (potentieel) oneindige processen

Het oneindige dat nooit actueel ‘echt’ bestaat, bereikt wordt

Bijv. bij $\sqrt{2}$: kwadraat van kettingbreuk steeds dichter bij 2

$$\phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}$$

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + - \ldots$$

Oneindig bij limiet van rij ($n \to \infty$)

$$\frac{1}{1}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \ldots \quad \longrightarrow \quad 0$$

$$0 \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$$

NIET: $\frac{1}{\infty}$

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1, \quad \left(1+\frac{1}{2}\right)^2, \quad \left(1+\frac{1}{3}\right)^3, \quad \ldots \quad \longrightarrow \quad e$$

$$e \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

NIET: $\left(1+\frac{1}{\infty}\right)^\infty$

Oneindig bij limiet van rij ($n \to \infty$)

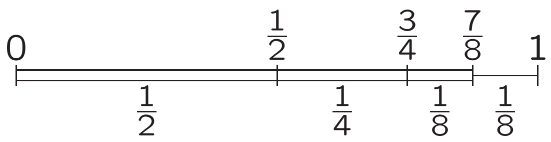
Dit leidt tot een topologisch oneindig

Je kan er willekeurig dichtbij komen

© 2002, T. Verhoeff Oneindig–9

Oneindig bij limiet van reeks ($\sum_{k=1}^{\infty}$)

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^n}$$



$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$$

$$\infty = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

Oneindig bij limiet van reeks ($\sum_{k=1}^{\infty}$)

Paradox van Zeno

Ook nog interessant (*harmonische* reeks):

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}$$

$$\infty = \lim_{n\to\infty} H_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} H_n - \log n$$

en

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots$$

Oneindige getallen

- Topologisch: limiet $\rightarrow$ ∞
- Algebraïsch: bestaat niet ($\infty - 1 = ?$ ofwel $? + 1 = \infty$)
- Maat voor grootte van verzamelingen: **kardinaalgetallen** als $\aleph_0$
- 'Maat' voor ordeningen: **ordinaalgetallen** als ω en ϵ_0

Oneindige getallen

Algebraïsch oneindig bestaat niet (in volle glorie): $\infty - 1 = x$

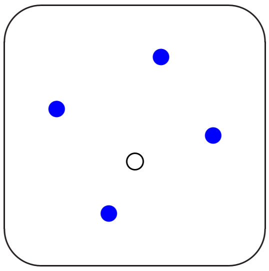
- x niet eindig, want eindig plus 1 is eindig
- x niet ∞, want dan $1 = 0$

Kardinaalgetallen vaak in populaire literatuur, daarom niet nu doen
Aftelbaar, overaftelbaar, diagonaalargument, machtsverheffen, (G)CH

Ordinaalgetallen: ruggengraat van de moderne verzamelingsleer
Informatica: onderzoek naar eindiging van rekenprocessen
datastructuren (samenpakking van informatie)

© 2002, T. Verhoeff Oneindig–11

Knikkerspel 1



Pak telkens een knikker:

- Verwijder 'm

Eindigt dit? Na hoeveel zetten?

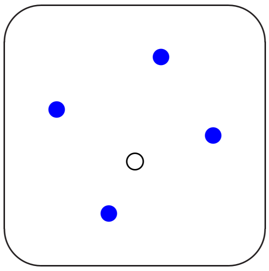
Knikkerspel 1

Gegeven een zak met een eindig aantal knikkers.

Zolang de zak niet leeg is, halen we er telkens één uit.

Dit eindigt na K stappen, als er initieel K knikkers zijn.

Knikkerspel 2



Pak telkens een knikker:

- Als blauw, dan verwijderen
- Als wit, dan vervangen door één blauwe

Knikkerspel 2

Je hebt nu ook een onbeperkte voorraad (blauwe) knikkers

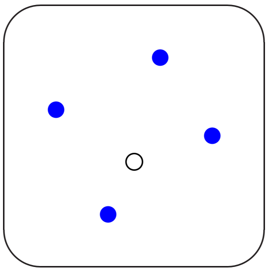
Het aantal neemt niet altijd af

Als je ook een blauwe door een witte zou vervangen, dan niet eindig

Wat als je twee blauwen teruglegt voor een witte?

© 2002, T. Verhoeff
Oneindig–13

Knikkerspel 3



Pak telkens een knikker:

- Als blauw, dan verwijderen
- Als wit, dan vervangen door willekeurig eindig aantal blauwen

Knikkerspel 3

Als dat willekeurig u niet zint,

lees dan ‘in N-de stap door N blauwen’

© 2002, T. Verhoeff Oneindig–14

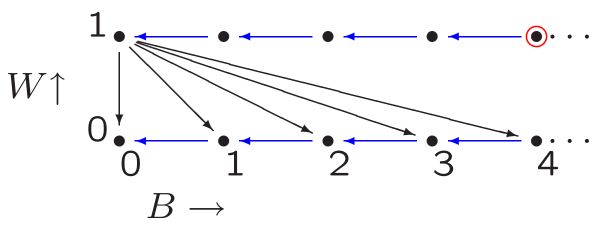
Knikkerspel analyse

W witte knikkers B blauwe knikkers

1. Eindigt na $W + B$ stappen

2. Eindigt na $2 * W + B$ stappen

3. Eindigt na ten hoogste $\omega * W + B$ stappen



Knikkerspel analyse

Wat als twee blauwen terugleggen? $3 * W + B$ stappen
En N blauwen terugleggen (vaste N)? $(N{+}1) * W + B$ stappen

En nu N terugleggen in N-de stap?

Geen enkele eindige weegfactor is zwaar genoeg

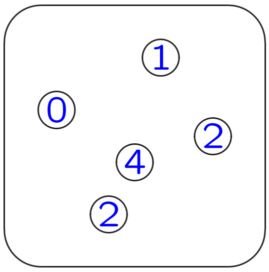
$N < \omega$ voor elke eindige N: $\omega{*}(W{-}1) + B{+}N < \omega{*}W + B$

Is elke dalende rij toch eindig? Zijn er goede rekenregels met ω?

Vergelijk met lexicografische ordening op paren

Ook met rode knikkers ($\rightarrow$ wit): $\omega^2 * R + \omega * W + B$

Lottobalspel



Pak telkens een $\mathbb{N}$-genummerde lottobal:

- Vervang door willekeurig aantal met kleinere waarden

  d.w.z. (n) vervangen door $(<n)$ $(<n)$ $\ldots$ $(<n)$

Lottobalspel

Verder generaliseren: onbeperkt aantal (genummerde) kleuren

Als dat willekeurig u niet zint,

lees dan ‘in N-de stap door N kleinere waarden’

Eindigt dit altijd, en waarom?

Wat gebeurt er met (0)? Komt niets voor terug!

Nu op naar het ultieme spel: Stelling van Goodstein

Bewerkingen op natuurlijke getallen

Opvolger (1 erbij): $a|$

Optellen (herhaald 1 erbij): $a + b = a\overbrace{|\ldots|}^{b\times}$

Vermenigvuldigen (herhaald optellen): $a * b = \overbrace{a + \ldots + a}^{b\times}$

$a * 0 = 0 \qquad a * 1 = a \qquad a * b| = a * b + a \qquad a * (b + c) = a * b + a * c$

Machtsverheffen (herhaald vermenigvuldigen): $a^b = \overbrace{a * \ldots * a}^{b\times}$

$a^0 = 1 \qquad a^1 = a \qquad a^{b|} = a^b * a \qquad a^{b+c} = a^b * a^c$

Bewerkingen op natuurlijke getallen

Om Stelling van Goodstein te formuleren moet je wat rekenen

Notatie $a|$ is niet standaard, turfje erbij

Bemerk de gelijkvormige eigenschappen voor $*$ en $\uparrow$

Maar: optellen en vermenigvuldigen zijn commutatief
$a + b = b + a \qquad a * b = b * a$

En machtsverheffen *niet*: $2^3 = 8 \neq 9 = 3^2$
Daarom ook twee inversen (linker en rechter: $\sqrt[b]{a}$ en $\log_b a$)

Decimale notatie

Ieder natuurlijk getal is op *unieke* wijze te schrijven als

som van machten van 10 met coëfficiënten < 10.

Voorbeeld:

$$\begin{aligned} 266 &= 200 + 60 + 6 \\ &= 2 * 100 + 6 * 10 + 6 * 1 \\ &= 2 * 10^2 + 6 * 10^1 + 6 * 10^0 \end{aligned}$$

Decimale notatie

Coëfficiënten c_i (kunnen 0 zijn; reden voor introductie 0)

Exponenten i (in positiesysteem gecodeerd door positie)

$$N = \sum_{i=0}^{k} c_i * 10^i$$

Vergelijk: rijtje waarden < 10

© 2002, T. Verhoeff
Oneindig–18

Notatie in grondtal $G \geq 2$

Ieder natuurlijk getal is op *unieke* wijze te schrijven als

som van machten van G met coëfficiënten $< G$.

Voorbeeld met $G = 2$ (*binair*):

$$\begin{aligned} 266 &= 256 + 8 + 2 \\ &= 2^8 + 2^3 + 2^1 \end{aligned}$$

Voorbeeld met $G = 3$ (*ternair*):

$$\begin{aligned} 266 &= 243 + 18 + 3 + 2 \\ &= 3^5 + 2 * 3^2 + 3^1 + 2 * 3^0 \end{aligned}$$

Notatie in grondtal $G \geq 2$

Binair: coëfficiënten 0 of 1

Ternair: coëfficiënten 0, 1 of 2

Coëfficiënt 0: term weglaten ($0 * a = 0$)

Coëfficiënt 1: coëfficiënt weglaten $1 * a = a$

Exponent 0: macht weglaten ($c * a^0 = c * 1 = c$)

Exponent 1: weglaten ($a^1 = a$)

© 2002, T. Verhoeff Oneindig–19

Super-G-notatie met grondtal $G \geq 2$

1. Noteer in grondtal G.

2. Herhaal met de *exponenten*.

3. Stop zodra alle getallen $\leq G$.

Voorbeeld met $G = 2$:

$$\begin{aligned} 266 &= 2^8 + 2^3 + 2 \\ &= 2^{2^3} + 2^{2+1} + 2 \\ &= 2^{2^{2+1}} + 2^{2+1} + 2 \end{aligned}$$

Super-G-notatie met grondtal $G \geq 2$

Herhalen: elementair principe (kinderspelen, moppen)

Herhaald machtsverheffen groeit heel hard

Bij $G = 10$ gebeurt er pas wat vanaf 100 miljard:

$$100\,000\,000\,000 = 10^{10+1}$$

Daaronder hetzelfde als notatie in grondtal 10

Goodstein-rij van $N > 0$ en $G \geq 2$

$N = 8 \quad G = 2$

1. Schrijf N in super-G-notatie. $8 = 2^{2+1}$
2. Vervang hierin elke G door $G + 1$. $3^{3+1} = 81$
3. Verlaag nieuwe N met 1. $N' = 80$
4. Verhoog G met 1. $G' = 3$
5. Stop als $N = 0$, anders vanaf stap 1 herhalen.

Goodstein-rij van $N > 0$ en $G \geq 2$

Dadelijk nog een groter voorbeeld

Vraag (nog) niet hoe Goodstein hier op kwam of waar het toe dient

Goodstein-rij bij $N = 266$ en $G = 2$

Volgnr.	N	G
1	266	2
	$2^{2^{2+1}} + 2^{2+1} + 2$	
	$3^{3^{3+1}} + 3^{3+1} + 3 - 1$	
2	443 . . . 886 (39 cijfers)	3
	$3^{3^{3+1}} + 3^{3+1} + 2$	
	$4^{4^{4+1}} + 4^{4+1} + 2 - 1$	
3	323 . . . 681 (617 cijfers)	4
	$4^{4^{4+1}} + 4^{4+1} + 1$	
	$5^{5^{5+1}} + 5^{5+1} + 1 - 1$	
4	. . . (> 10 000 cijfers)	5
	$5^{5^{5+1}} + 5^{5+1}$	

Goodstein-rij bij $N = 266$ en $G = 2$

Gaat natuurlijk verder na 4e waarde, maar rijst de pan uit

De getallen doen duidelijk hun best oneindig groot te worden :-)

Tussenresultaat voor N hoef je niet uit te rekenen, want
je kan meteen van notatie in grondtal G naar $G + 1$ (geel → geel)

$$G^E - 1 \;=\; H * G^{E-1} + \ldots + H * G + H \quad \text{met } H = G - 1$$

$$10^E - 1 \;=\; \overbrace{9\ldots9}^{E\times} \qquad \text{voor } E \geq 1$$

Spelversie: Hercules en de Hydra (draak met vertakkende nekken)

Stelling van Goodstein (1944)

Elke Goodstein-rij eindigt met $N = 0$.

't Kan even duren:

- $N = 3$, $G = 2$ eindigt na 5 stappen
- $N = 4$, $G = 2$ eindigt na $3 * 2^{402\,653\,211} - 3 \approx 10^{10^8}$ stappen

Stelling van Goodstein (1944)

Die -1 doet 't 'm, die hamert maar door ...

Aantal stappen groeit supersuperexponentieel met N
Lijkt op Ackermann-functie

Contrast met onbewezen vermoedens over tammere rekenprocessen:

Tel getal bij op zijn omkering tot palindroom
$152 \to 152 + 251 = 403 \to 403 + 304 = 707$ $\quad 196 \to ?$

Als N even $\to N/2$, als N oneven $\to 3N + 1$ (Collatz)
$3 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1 \to 4 \to \ldots$

Bewijsbaarheid van Stelling van Goodstein

Stelling van Kirby en Paris (1982):

De Stelling van Goodstein volgt *niet* uit de Peano Axioma's.

'Gewone' inductie is niet toereikend, Goodstein rij 'groeit te snel'.

Elk bewijs van de Stelling van Goodstein vergt (een vorm van) *transfiniete* inductie zoals met *ordinaalgetallen*.

Bewijsbaarheid van Stelling van Goodstein

Peano Axioma's (PA):

1. $0 \in \mathbb{N}$
2. $a \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; a| \in \mathbb{N}$
3. $\forall\, a \in \mathbb{N} : a| \neq 0$
4. $a| = b| \;\Rightarrow\; a = b$
5. $0 \in S \;\wedge\; (\forall\, a \in \mathbb{N} : a \in S \;\Rightarrow\; a| \in S) \;\Rightarrow\; \mathbb{N} \subseteq S$

Axioma 5: Inductie (basis, stap),
vergelijk met omvallende rij dominostenen (begin, doortikken)

Onvolledigheidsstelling van Gödel over PA (1930):
Er bestaan ware uitspraken, die onbewijsbaar zijn in PA

Maar nu met 'echte' rekenkundige stelling die onbewijsbaar is in PA

© 2002, T. Verhoeff Oneindig–24

Ordinaalgetallen t/m ω

Ordinaalgetal is verzameling van al zijn voorgangers:

$$
\begin{array}{rcl}
0 & = & \{\,\} \\
1 & = & \{0\} \\
2 & = & \{0,\ 1\} \\
3 & = & \{0,\ 1,\ 2\} \\
 & \vdots & \\
N & = & \{0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N-1\} \\
 & \vdots & \\
\omega & = & \{0,\ 1,\ 2,\ \ldots\}
\end{array}
$$

ω is kleinste oneindige ordinaalgetal: $N < \omega$ voor alle $N \in \mathbb{N}$

Ordinaalgetallen t/m ω

Ruggengraat van de moderne verzamelingsleer

© 2002, T. Verhoeff Oneindig–25

Rekenen met ordinaalgetallen

Opvolger (1 erbij): $\alpha| = \alpha \cup \{ \alpha \}$

Limiet: $\bigcup_{\alpha \in A} \alpha$ $\quad$ ♠ $\bowtie 1$, ♠ $\bowtie 2$, $\ldots$, ♠ $\bowtie \omega$

Optellen (herhaald 1 erbij)

Vermenigvuldigen (herhaald optellen)

Machtsverheffen (herhaald vermenigvuldigen)

Rekenen met ordinaalgetallen

Net als bij natuurlijke getallen, maar nu limiet erbij

$2| = \{ 0, 1 \}| = \{ 0, 1, 2 \} = 3$

Ook ω keer iets herhalen: $\omega * \omega = \overbrace{\omega + \ldots}^{\omega \times}$

Pas op met rekenen: niet alle regels gelden meer

$$2 * \omega = \overbrace{2 + \ldots}^{\omega \times} = \overbrace{1 + 1 + \ldots}^{\omega \times} = \overbrace{1 + \ldots}^{\omega \times} = 1 * \omega = \omega$$

$$\omega * 2 = \omega + \omega = \overbrace{1 + \ldots}^{\omega \times} + \overbrace{1 + \ldots}^{\omega \times} \neq \omega$$

Meer oneindige ordinaalgetallen

$$\omega,\quad \omega+1,\quad \omega+2,\quad \overset{1}{\ldots},\quad \omega+\omega=\omega*2$$

$$\omega*2+1,\quad \omega*2+2,\quad \overset{1}{\ldots},\quad \omega*2+\omega=\omega*3$$

$$\overset{1}{\ldots},\quad \omega*4,\quad \overset{1}{\ldots},\quad \omega*5,\quad \overset{2}{\ldots},\quad \omega*\omega=\omega^2$$

$$\omega^2+1,\quad \overset{1}{\ldots},\quad \omega^2+\omega,\quad \overset{2}{\ldots},\quad \omega^2+\omega^2=\omega^2*2$$

$$\overset{2}{\ldots},\quad \omega^2*3,\quad \overset{2}{\ldots},\quad \omega^2*4,\quad \overset{3}{\ldots},\quad \omega^2*\omega=\omega^3$$

$$\overset{4}{\ldots},\quad \omega^4,\quad \overset{5}{\ldots},\quad \omega^5,\quad \overset{\omega}{\ldots},\quad \omega^\omega$$

Meer oneindige ordinaalgetallen

Tot ω^2: $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, 1e kwadrant van 2-dimensionale rooster

$$\begin{array}{cccc}
\vdots & & & \\
\omega*3 & \ldots & & \\
\omega*2 & \omega*2+1 & \ldots & \\
\omega & \omega+1 & \omega+2 & \ldots \\
0 & 1 & 2 & \ldots
\end{array}$$

Tot ω^N in N-dimensionale rooster

Alternatief: $\mathbb{N}$ samenpersen op stukje van $\mathbb{Q}[0,1)$: $n \to 1-\frac{1}{2^n}$

Dan $[\omega,\omega*2) \to \mathbb{Q}[1,1\frac{1}{2})$

I.h.a. $\omega*n \to 2-\frac{1}{2^n}$, dan $\omega^2 \to 2$

Normaalvorm van $\alpha < \omega^\omega$:

$$\alpha = \omega^k * c_k + \omega^{k-1} * c_{k-1} + \ldots + \omega^2 * c_2 + \omega * c_1 + c_0$$

waarbij k en alle c_i eindig zijn.

Vergelijk met decimale notatie:

$$N = 10^k * c_k + 10^{k-1} * c_{k-1} + \ldots + 10^2 * c_2 + 10 * c_1 + c_0$$

waarbij $0 \leq c_i < 10$, maar nu onbegrensde coëfficiënten.

Zelfde structuur als een lijst natuurlijke getallen: $[c_k, c_{k-1}, \ldots c_1, c_0]$.

Normaalvorm voor ordinaalgetallen $< \omega^\omega$

Ingewikkelder dan 1-dimensionale structuur van $\mathbb{N}$

Lijsten: typische datastructuur in informatica bij rekenprocessen

Oplossing voor lottobalspel: $c_i =$ aantal ballen met waarde i

Lexicografische ordening op lijsten over $\mathbb{N}$

Inbedden in $(\mathbb{Q}, <)$: $k + 0.\overbrace{1\ldots1}^{c_k}0\overbrace{1\ldots1}^{c_{k-1}}0\overbrace{\ldots\ldots}^{c_{k-2}\cdots c_1}0\overbrace{1\ldots1}^{c_0}000\ldots$

$c_k \neq 0$

© 2002, T. Verhoeff Oneindig–28

Op naar epsilon nul

$$0, \quad 1, \quad \ldots, \quad \omega, \quad \ldots, \quad \omega * 2, \quad \ldots, \quad \omega^2, \quad \ldots, \quad \omega^\omega$$

$$\omega^\omega + 1, \quad \ldots, \quad \omega^\omega * 2 \quad \ldots, \quad \omega^\omega * \omega = \omega^{\omega+1}$$

$$\ldots, \quad \omega^{\omega*2}, \quad \ldots, \quad \omega^{\omega^2}, \quad \ldots, \quad \omega^{\omega^\omega}$$

$$\ldots, \quad \omega^{\omega^{\omega^\omega}}, \quad \ldots, \quad \underbrace{\omega^{\omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}}_{\omega\times} = \epsilon_0$$

ϵ_0 is kleinste oplossing van

$$\alpha \;=\; \omega^\alpha$$

Op naar epsilon nul

Dit is al lastiger te tekenen

In te bedden in $\mathbb{R}$

Andere kleinste oplossingen:

$$\begin{array}{lcll}
\alpha & = & 1 + \alpha & (\omega) \\
\alpha & = & \omega + \alpha & (\omega * \omega = \omega^2) \\
\alpha & = & 2 * \alpha & (\omega) \\
\alpha & = & \omega * \alpha & (\omega^\omega) \\
\alpha & = & 2^\alpha & (\omega)
\end{array}$$

Normaalvorm voor ordinaalgetallen $< \epsilon_0$

Normaalvorm van $\alpha < \epsilon_0$:

$$\alpha \;=\; \omega^{\beta_k} * c_k + \omega^{\beta_{k-1}} * c_{k-1} + \ldots + \omega^{\beta_0} * c_0$$

waarbij k en alle c_i eindig zijn en $c_i \neq 0$, en

$$\alpha > \beta_k > \beta_{k-1} > \ldots > \beta_0$$

Vergelijk met super-G-notatie, maar nu onbegrensde coëfficiënten.

Zelfde structuur als een boom met positieve natuurlijke getallen.

Normaalvorm voor ordinaalgetallen $< \epsilon_0$

Boom bij $\omega^{\omega+2} + \omega^2 * 2 + \omega + 2$ afgeleid van $\varphi(266, 3)$

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & & & & & & & & \\
| & & & & & & & & \\
1 & — & 2 & & 2 & & 1 & & \\
| & & & & | & & | & & \\
1 & — & — & — & 2 & — & 1 & — & 2
\end{array}$$

Bomen: de ‘ultieme’ datastructuur in de informatica

Meer structuur dan lijsten, maar niet expressiever dan geneste lijsten

Let op dat $\alpha > \beta_k$ niet voor elke ordinaal α geldt

Wel geldt i.h.a. $\alpha \geq \beta_k$; gelijkheid bij $\alpha = \epsilon_0$, want $\epsilon_0 = \omega^{\epsilon_0}$

Bewijs van Stelling van Goodstein

Schrijf N in super-G-notatie.

Vervang hierin iedere G door ω.

Het resultaat $\varphi(N, G)$ is een ordinaalgetal $< \epsilon_0$.

Bijvoorbeeld: $\varphi(266, 2) = \omega^{\omega^{\omega+1}} + \omega^{\omega+1} + \omega$

Claim: Als N', G' de opvolger in de Goodstein-rij bij N, G is, dan is

$$\varphi(N', G') < \varphi(N, G)$$

Ordinaalgetallen zijn welgeordend: elke dalende rij eindigt.

Bewijs van Stelling van Goodstein

Dit hoeft u niet meteen te begrijpen

N.B. De Goodstein-operatie '-1' is niet ordinaal-operatie '-1'

Slot

- ∞ is geen getal (algebra), wel limiet (topologie)

- Ordinaalgetallen (rangorde):

  $0,\ 1,\ 2,\ \omega,\ \omega+1,\ \omega*2,\ \omega^2,\ \omega^\omega,\ \omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = \epsilon_0,\ \ldots$

- Kardinaalgetallen (aantal):

  $0,\ 1,\ 2,\ \aleph_0,\ 2^{\aleph_0} = c,\ \aleph_1,\ \ldots$

Slot

En zo kan ik nog oneindig lang doorgaan . . . , nou ja