Oneindig in Wiskunde & Informatica

Lezing in de reeks *Oneindig*
3 oktober 2007 / Studium Generale TU Delft

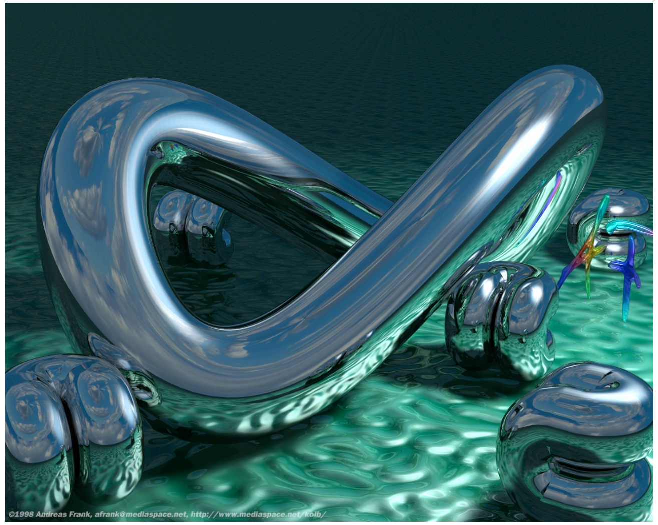
∞

Tom Verhoeff

Technische Universiteit Eindhoven
Faculteit Wiskunde & Informatica

`http://www.win.tue.nl/~wstomv/`

Eindige en oneindige getallen



Oneindig in Wiskunde & Informatica

Er zijn **DRIE** soorten wiskundigen:

- zij die kunnen tellen en
- zij die dat *niet* kunnen

Ik zal proberen in eindige tijd wat te vertellen over oneindig

Wie waren er 5 jaar geleden bij in Maastricht?

Wie kennen het Hilbert hotel al? Wie de Stelling van Goodstein?

Eindige en oneindige getallen

Belang van getallen: wetenschap, economie, maatschappij

'Meten'

Niet-wiskundige boeken over getallen:
geschiedenis, filosofie, antropologie, psychologie, mystiek

Natuurkunde: (on)eindigheid van ruimte en tijd

Oneindig in de informatica:
data(structuren), eindiging van 'reken'processen

't Wordt een heel verhaal, u moet wel eens wat voor lief nemen

Top tien van getallen (Clifford Pickover, 2001)

1.	0		
2.	π	3.141592653...	Archimedes, Ludolph
3.	e	2.718281828...	Napier, Euler
4.	i	$\sqrt{-1}$	Gauss
5.	$\sqrt{2}$	1.414213562...	Pythagoras
6.	1		
7.	2		
8.	γ	0.5772156649...	Euler, Mascheroni
9.	Ω	*onberekenbaar*	Chaitin
10.	$\aleph_0$	*oneindig*	Cantor

Getallen verzameld

- $\mathbb{N}$ – Natuurlijke getallen: $0,\ 1,\ 2,\ \ldots$
- $\mathbb{Z}$ – Gehele getallen: $\ldots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$
- $\mathbb{Q}$ – Rationale getallen: $\ldots,\ -7\frac{2}{3},\ \ldots,\ \frac{1}{2},\ \ldots,\ \frac{355}{113},\ \ldots$
- $\mathbb{R}$ – Reële getallen: $\ldots,\ \gamma,\ \ldots,\ \sqrt{2},\ \ldots,\ e,\ \ldots,\ \pi,\ \ldots,\ \Omega,\ \ldots$
- $\mathbb{C}$ – Complexe getallen: $\ldots,\ i,\ \ldots,\ \frac{1+i}{\sqrt{2}},\ \ldots$
- Keten van uitbreidingen: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Top tien van getallen (Clifford Pickover, 2001)

Alle getallen hebben wel wat, moeilijk te kiezen

Over 0, π, e, i zijn hele boeken geschreven (populair)

Niet over 1, 2 of $\sqrt{2}$ (voorzover ik weet)

Ook nog interessant:

$$\phi = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right) = 1.6180339887\ldots \quad \text{Gulden Snede, Fibonacci}$$

$$\log 2 = 0.69314718\ldots \quad \text{Mercator}$$

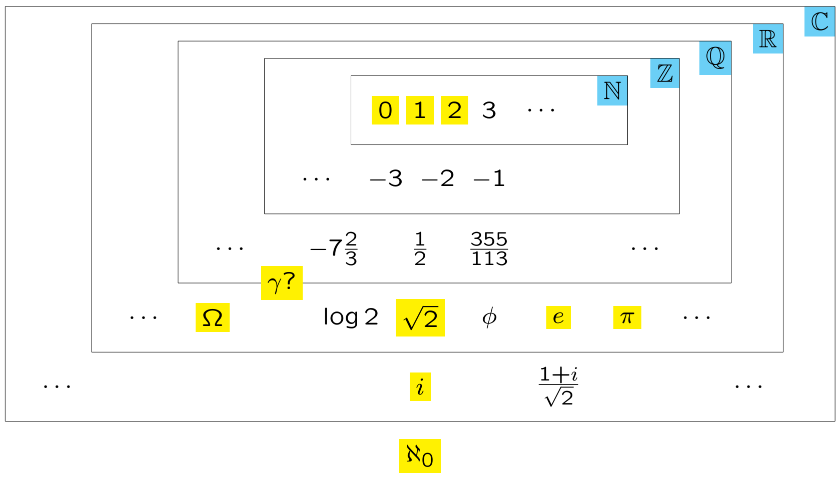
Getallen verzameld

Classificatie

Vergelijk met biologische taxonomie

Soms onenigheid over $0 \in \mathbb{N}$

Geneste verzamelingen van getallen



Geneste verzamelingen van getallen

Volgende verzameling omvat vorige

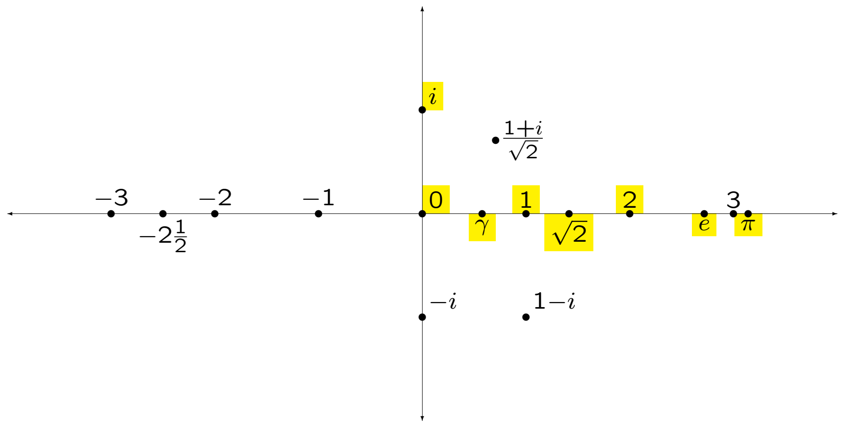
Allemaal oneindig grote verzamelingen (...)

Clifford's Top Tien bevat geen getallen uit $\mathbb{Z} - \mathbb{N}$, $\mathbb{Q} - \mathbb{Z}$

$\gamma \in \mathbb{Q}$ onbekend, vermoed wordt $\gamma \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ (irrationaal)

$\aleph_0 \notin \mathbb{C}$

Getallen als meetkundige punten: topologische structuur



Getallen als meetkundige punten: topologische structuur

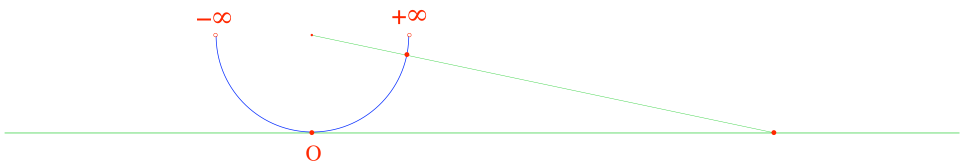
Topologische structuur: nabijheid

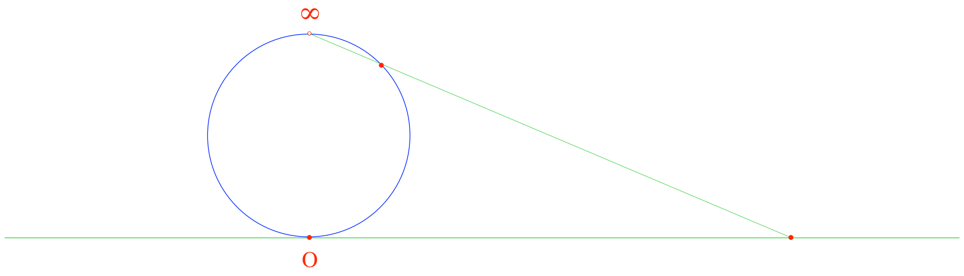
Meetkundige lijn ($\mathbb{R}$) en vlak ($\mathbb{C}$):

- oneindig uitgestrekt, onbegrensd, zonder grens
- oneindig dichtgepakt (dichter dan $\mathbb{Q}$)

Punt(en) op oneindig toevoegen aan getallenlijn (animeren met Cabri)

Punt(en) op oneindig toevoegen





Bewerkingen op getallen: algebraïsche structuur

$\mathbb{N}$: $a+b$ (optellen), $a*b$ (vermenigvuldigen), a^b (machtsverheffen)

$\mathbb{Z}$: $a-b$ (aftrekken: $a = x+b$)

$\mathbb{Q}$: a/b (delen: $a = x * b$)

$\mathbb{R}$: $\sqrt[b]{a}$ (worteltrekken: $a = x^b$),

$\log_b a$ (logaritme: $a = b^x$)

$\mathbb{C}$: nulpunten van polynomen, bijv. $x^2 + 1 = 0$

Punt(en) op oneindig toevoegen

Elk punt op de (horizontale rode) reële as correspondeert 1–1 met één punt op (blauwe) halve cirkel zonder eindpunten

Idem voor hele cirkel met gat

Platte vlak is op te krullen tot bol: één punt op oneindig toevoegen

Kan ook met één extra punt per richting: halve bol met 'kruiskap' (projectieve vlak)

Bewerkingen op getallen: algebraïsche structuur

Eenheidselement, nulelement, inverse, associatief, distributief

Ordening

Uitbreiding met doel bewerkingen gesloten te maken
ofwel bepaalde (algebraïsche) vergelijkingen oplosbaar te maken
$\mathbb{Z}$ (schulden, debet); $\mathbb{Q}$ (taart delen)

Machtsverheffen in $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Q}$: $b \in \mathbb{N}$
Machtsverheffen in $\mathbb{R}$: $b \in N \lor a > 0 \lor (-b \in \mathbb{N} \land a \neq 0)$
Delen in $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$: $b \neq 0$
Worteltrekken in $\mathbb{R}$: $a > 0$
Logaritme in $\mathbb{R}$: $a > 0$ en $b > 0$
Logaritme in $\mathbb{C}$: $a \neq 0$ en $b \neq 0$ en $|b| \neq 1$

Potentieel oneindige processen (...)

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \pm \cdots$$

$$\frac{2}{\pi} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdot \ldots$$

$$e = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots$$

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}$$

Oneindig bij limiet van rij ($n \to \infty$)

$$\frac{1}{1}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \ldots \quad \to \quad 0$$

$$0 = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}$$

NIET: $\frac{1}{\infty}$

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right)^1, \quad \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2, \quad \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3, \quad \ldots \quad \to \quad e$$

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

NIET: $\left(1 + \frac{1}{\infty}\right)^\infty$

Potentieel oneindige processen (...)

Reële getallen als limiet van (potentieel) oneindige processen

Het oneindige dat nooit actueel 'echt' bestaat of bereikt wordt

Bij e: algemene term $\frac{1}{n!}$

Bijv. bij $\sqrt{2}$: kwadraat van kettingbreuk steeds dichter bij 2

$$\phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}$$

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \pm \cdots$$

Oneindig bij limiet van rij ($n \to \infty$)

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = \sqrt{e}$$

Is ook $= \left(1 + \frac{1}{\infty}\right)^\infty$

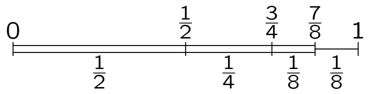
Dit leidt tot een topologisch oneindig

Je kan er willekeurig dichtbij komen

'Snelheid' van nadering ook van belang

Oneindig bij limiet van reeks ($\sum_{k=1}^{\infty}$)

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k} = 1-\frac{1}{2^n}$$



$$1 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$$

$$\infty = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$$

Fictieve oneindige ‘getallen’

- Topologisch: limiet $\to \infty$

  Al dan niet onderscheid tussen $-\infty$ en $+\infty$

- Algebraïsch: bestaat niet

  $\infty - 1 = ?$ ofwel $? + 1 = \infty$

Oneindig bij limiet van reeks ($\sum_{k=1}^{\infty}$)

Paradox van Zeno

Ook nog interessant (*harmonische* reeks):

$$H_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}$$

$$\infty = \lim_{n\to\infty} H_n = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$$

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} H_n - \log n$$

en

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots$$

Fictieve oneindige ‘getallen’

Algebraïsch oneindig bestaat niet (in volle glorie): $\infty - 1 = x$

- x niet eindig, want eindig plus 1 is eindig
- x niet ∞, want dan (schrapeigenschap) $1 = 0$

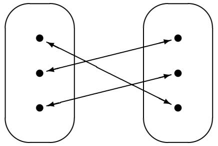
Eigenschappen opofferen (die ‘gewone’ getallen wel hebben)

‘Echte’ oneindige getallen

Kardinaalgetallen als maat voor grootte van verzamelingen:

0, 1, 2, 3, . . . , $\aleph_0$, . . .

Gelijkmachtigheid: 1–1 correspondentie



Ordinaalgetallen als maat voor rangorde:

eerste, tweede, . . . , ω, . . . , ϵ_0, . . .

Wel-geordende rij: lineair, elke deelrij heeft minimum

Kardinaalgetallen: aftelbaarheid

$$
\begin{array}{rcccccccccccl}
\mathbb{N} = \{ & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \ldots & \} \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \\
\mathbb{N}^{+} = \{ & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \ldots & \} \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \\
\mathbb{N}^{even} = \{ & 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 & \ldots & \} \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \\
\mathbb{Z} = \{ & 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & -3 & 3 & -4 & 4 & \ldots & \} \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \\
\mathbb{Q}^{+} = \{ & \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{2}{1} & \frac{1}{3} & \frac{3}{1} & \frac{1}{4} & \frac{2}{3} & \frac{3}{2} & \frac{4}{1} & \ldots & \}
\end{array}
$$

$$|\mathbb{N}| = \aleph_0$$

‘Echte’ oneindige getallen

Kardinaalgetallen vaak in populaire literatuur, daarom kort doen.

Aftelbaar, overaftelbaar, Hilbert-hotel

Ordinaalgetallen: ruggengraat van de moderne verzamelingsleer

Informatica: onderzoek naar eindiging van rekenprocessen; datastructuren (samenpakking van informatie)

Kardinaalgetallen: aftelbaarheid

Aftelbaar $\Leftrightarrow$ gelijkmachtig met $\mathbb{N}$

$\aleph_0$ = kleinste oneindige kardinaalgetal

Volgorde niet van belang!

Oneindig $\Leftrightarrow$ gelijkmachtig met echte deelverzameling

Banach–Tarski paradox: eenheidsbol is in 5 stukken te verdelen, waarvan 2 eenheidsbollen te maken zijn

Kardinaalgetallen: overaftelbaarheid

$a \in V$	$\leftrightarrow$	deelverzameling $S_a \subseteq V$				
		0	1	2	3	...
0	$\leftrightarrow$	$\bullet$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	
1	$\leftrightarrow$	$\circ$	$\circ$	$\bullet$	$\circ$	
2	$\leftrightarrow$	$\bullet$	$\bullet$	$\circ$	$\circ$	
3	$\leftrightarrow$	$\circ$	$\circ$	$\bullet$	$\bullet$	
$\vdots$						
?	$\leftrightarrow$	$\circ$	$\bullet$	$\bullet$	$\circ$	
		complement van diagonaal				

$$|V| < \left|2^V\right| = 2^{|V|}$$

$$\aleph_0 = |\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| < |\mathbb{R}| = |\mathbb{C}| = 2^{\aleph_0} = c$$

Kardinaalgetallen: overaftelbaarheid

Diagonaalargument van Cantor

$$\begin{array}{rcl} D & = & \{\, a \in V \mid a \notin S_a \,\} \\ a \in D & \Leftrightarrow & a \notin S_a \\ D & \neq & S_a \end{array}$$

Machtsverheffen: B^A = verzameling van alle afbeeldingen $A \to B$

2^V = verzameling van alle deelverzamelingen van V: $S \subseteq V \Leftrightarrow S \in 2^V$

Geldt voor elke V (niet noodzakelijk eindig of aftelbaar)

Continuum $c = 2^{\aleph_0}$

Informatica: Eindiging van ‘reken’processen

Termherschrijfsysteem:

- Begin met eindig rijtje over $\{\, a, b, c \,\}$
- Vervang herhaaldelijk deelrijtjes:

$$\begin{array}{rcl} aa & \to & bc \\ bb & \to & ac \\ cc & \to & ab \end{array}$$

Voorbeeld:

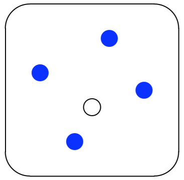
$$bb\underline{aa} \to b\underline{bb}c \to ba\underline{cc} \to b\underline{aa}b \to \underline{bb}cb \to a\underline{cc}b \to aa\underline{bb} \to a\underline{aa}c \to ab\underline{cc} \to abab$$

Eindigt dit voor elk beginrijtje?

Informatica: Eindiging van ‘reken’processen

Dieter Hofbauer and Johannes Waldmann:
“Termination of $\{aa \to bc, bb \to ac, cc \to ab\}$”.
Inf. Process. Lett. **98**(4):156–158 (2006).

Knikkerspel 1

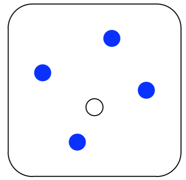


Pak telkens een knikker:

- Verwijder 'm

Eindigt dit? Na hoeveel zetten?

Knikkerspel 2



Pak telkens een knikker:

- Als blauw, dan verwijderen
- Als wit, dan vervangen door één blauwe

Knikkerspel 1

Gegeven een zak met een eindig aantal knikkers.

Zolang de zak niet leeg is, halen we er telkens één uit.

Dit eindigt na K stappen, als er initieel K knikkers zijn.

Knikkerspel 2

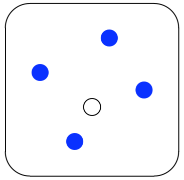
Je hebt nu ook een onbeperkte voorraad (blauwe) knikkers

Het aantal neemt niet altijd af

Als je ook een blauwe door een witte zou vervangen, dan niet eindig

Wat als je twee blauwe teruglegt voor een witte?

Knikkerspel 3



Pak telkens een knikker:

- Als blauw, dan verwijderen
- Als wit, dan vervangen door willekeurig eindig aantal blauwe

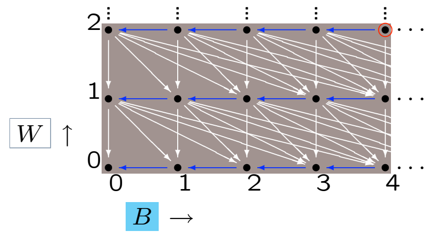
Knikkerspel analyse

W witte knikkers B blauwe knikkers

Spel 1. Eindigt na $W + B$ stappen

Spel 2. Eindigt na $2 * W + B$ stappen

Spel 3. Eindigt na ten hoogste $\omega * W + B$ stappen



Knikkerspel 3

Als dat willekeurig u niet zint,

lees dan ‘in N-de stap door N blauwe’

Knikkerspel analyse

Wat als twee blauwe terugleggen? $3 * W + B$ stappen
En N blauwe terugleggen (vaste N)? $(N+1) * W + B$ stappen

En nu N terugleggen in N-de stap?

Geen enkele eindige weegfactor is zwaar genoeg

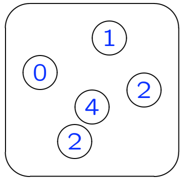
$N < \omega$ voor elke eindige N: $\omega*(W-1) + B+N < \omega*W + B$

Is elke dalende rij toch eindig? Zijn er goede rekenregels met ω?

Vergelijk met lexicografische ordening op paren

Ook met rode knikkers ($\rightarrow$ wit): $\omega^2 * R + \omega * W + B$

Lottobalspel



Pak telkens een $\mathbb{N}$-genummerde lottobal:

- Vervang door willekeurig aantal met kleinere waarden

  d.w.z. (n) vervangen door $(<n)$ $(<n)$ $\cdots$ $(<n)$

Bewerkingen op natuurlijke getallen

Opvolger (1 erbij): $a|$

Optellen (herhaald 1 erbij): $a + b = a\overbrace{|\cdots|}^{b\times}$

Vermenigvuldigen (herhaald optellen): $a * b = \overbrace{a + \cdots + a}^{b\times}$

$a * 0 = 0 \qquad a * 1 = a \qquad a * b| = a * b + a \qquad a * (b + c) = a * b + a * c$

Machtsverheffen (herhaald vermenigvuldigen): $a^b = \overbrace{a * \cdots * a}^{b\times}$

$a^0 = 1 \qquad a^1 = a \qquad a^{b|} = a^b * a \qquad a^{b+c} = a^b * a^c$

Lottobalspel

Verder generaliseren: onbeperkt aantal (genummerde) kleuren

Als dat willekeurig u niet zint,

lees dan ‘in N-de stap door N kleinere waarden’

Eindigt dit altijd, en waarom?

Wat gebeurt er met (0)? Komt niets voor terug!

Nu op naar het ultieme spel: Stelling van Goodstein

Bewerkingen op natuurlijke getallen

Om Stelling van Goodstein te formuleren moet je wat rekenen

Notatie $a|$ is niet standaard: turfje erbij

Bemerk de gelijkvormige eigenschappen voor $*$ en $\uparrow$

Optellen en vermenigvuldigen zijn commutatief
$a + b = b + a \qquad a * b = b * a$

Maar machtsverheffen *niet*: $2^3 = 8 \neq 9 = 3^2$
Daarom ook twee inversen (linker en rechter: $\sqrt[b]{a}$ en $\log_b a$)

Decimale notatie

Ieder natuurlijk getal is op *unieke* wijze te schrijven als

som van machten van 10 met coëfficiënten < 10.

Voorbeeld:

$$\begin{aligned} 266 &= 200 + 60 + 6 \\ &= 2 * 100 + 6 * 10 + 6 * 1 \\ &= 2 * 10^2 + 6 * 10^1 + 6 * 10^0 \end{aligned}$$

Notatie in grondtal $G \geq 2$

Ieder natuurlijk getal is op *unieke* wijze te schrijven als

som van machten van G met coëfficiënten $< G$.

Voorbeeld met $G = 2$ (*binair*):

$$\begin{aligned} 266 &= 256 + 8 + 2 \\ &= 2^8 + 2^3 + 2^1 \end{aligned}$$

Voorbeeld met $G = 3$ (*ternair*):

$$\begin{aligned} 266 &= 243 + 18 + 3 + 2 \\ &= 3^5 + 2 * 3^2 + 3^1 + 2 * 3^0 \end{aligned}$$

Decimale notatie

Coëfficiënten c_i (kunnen 0 zijn; reden voor introductie 0)

Exponenten i (in positiesysteem gecodeerd door positie)

$$N = \sum_{i=0}^{k} c_i * 10^i$$

Vergelijk: rijtje waarden < 10

Notatie in grondtal $G \geq 2$

Binair: coëfficiënten 0 of 1

Ternair: coëfficiënten 0, 1 of 2

Coëfficiënt 0: term weglaten ($0 * a = 0$)

Coëfficiënt 1: coëfficiënt weglaten $1 * a = a$

Exponent 0: macht weglaten ($c * a^0 = c * 1 = c$)

Exponent 1: exponent weglaten ($a^1 = a$)

Super-G-notatie met grondtal $G \geq 2$

1. Noteer in grondtal G.
2. Herhaal met de *exponenten*.
3. Stop zodra alle getallen $\leq G$.

Voorbeeld:

$G = 2$	$G = 3$
$266 = 2^8 + 2^3 + 2$	$266 = 3^5 + 2 * 3^2 + 3^1 + 2$
$= 2^{2^3} + 2^{2+1} + 2$	$= 3^{3+2} + 2 * 3^2 + 3^1 + 2$
$= 2^{2^{2+1}} + 2^{2+1} + 2$	

Super-G-notatie met grondtal $G \geq 2$

Herhalen: elementair principe (kinderspelen, moppen)

Herhaald machtsverheffen groeit heel hard

Bij $G = 10$ gebeurt er pas wat vanaf 100 miljard:

$$100\,000\,000\,000 = 10^{10+1}$$

Daaronder hetzelfde als notatie in grondtal 10

Goodstein-rij van $N > 0$ en $G \geq 2$

$N = 8 \quad G = 2$

1. Schrijf N in super-G-notatie. $8 = 2^{2+1}$
2. Vervang hierin elke G door $G + 1$. $3^{3+1} = 81$
3. Verminder met 1; geeft nieuwe N. $N' = 80$
4. Verhoog G met 1. $G' = 3$
5. Stop als $N = 0$, anders vanaf stap 1 herhalen.

Goodstein-rij van $N > 0$ en $G \geq 2$

Dadelijk nog een groter voorbeeld

Vraag (nog) niet hoe Goodstein hier op kwam of waar het toe dient

Goodstein-rij bij $N = 266$ en $G = 2$

Volgnr.	N	G
1	266	2
	$2^{2^{2+1}} + 2^{2+1} + 2$	
	$3^{3^{3+1}} + 3^{3+1} + 3 - 1$	
2	443...886 (39 cijfers)	3
	$3^{3^{3+1}} + 3^{3+1} + 2$	
	$4^{4^{4+1}} + 4^{4+1} + 2 - 1$	
3	323...681 (617 cijfers)	4
	$4^{4^{4+1}} + 4^{4+1} + 1$	
	$5^{5^{5+1}} + 5^{5+1} + 1 - 1$	
4	... (> 10 000 cijfers)	5
	$5^{5^{5+1}} + 5^{5+1}$	

Goodstein-rij bij $N = 266$ en $G = 2$

Gaat natuurlijk verder na 4e waarde, maar rijst de pan uit

De getallen doen duidelijk hun best oneindig groot te worden :-)

Tussenresultaat voor N hoef je niet uit te rekenen, want
je kan meteen van notatie in grondtal G naar $G+1$ (geel → geel)

$$G^E - 1 = H * G^{E-1} + \ldots + H * G + H \quad \text{met } H = G - 1$$

$$10^E - 1 = \overbrace{9\ldots9}^{E\times} \quad \text{voor } E \geq 1$$

Spelversie: Hercules en de Hydra (draak met vertakkende nekken)

Stelling van Goodstein (1944)

Elke Goodstein-rij eindigt met $N = 0$.

't Kan even duren:

- $N = 3$, $G = 2$ eindigt na 5 stappen
- $N = 4$, $G = 2$ eindigt na $3 * 2^{402\,653\,211} - 3 \approx 10^{10^8}$ stappen

Stelling van Goodstein (1944)

Die -1 doet 't 'm, die hamert maar door ...

Aantal stappen groeit supersuperexponentieel met N
Lijkt op Ackermann-functie

Contrast met onbewezen vermoedens over tammere rekenprocessen:

Tel getal bij zijn omkering op, tot palindroom ontstaat
$152 \to 152 + 251 = 403 \to 403 + 304 = 707 \qquad 196 \to ?$

Als N even $\to N/2$, als N oneven $\to 3N + 1$ (Collatz)
$3 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1 \to 4 \to \cdots$

Bewijsbaarheid van Stelling van Goodstein

Stelling van Kirby en Paris (1982):

> De Stelling van Goodstein volgt *niet* uit de Peano Axioma's.

'Gewone' inductie is niet toereikend, Goodstein rij 'groeit te snel'.

Elk bewijs van de Stelling van Goodstein vergt (een vorm van)
transfiniete inductie zoals met *ordinaalgetallen*.

Ordinaalgetallen t/m ω

Ordinaalgetal is verzameling van al zijn voorgangers:

$$\begin{aligned} 0 &= \{\,\} \\ 1 &= \{0\} \\ 2 &= \{0,\ 1\} \\ 3 &= \{0,\ 1,\ 2\} \\ &\vdots \\ N &= \{0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N-1\} \\ &\vdots \\ \omega &= \{0,\ 1,\ 2,\ \ldots\} \end{aligned}$$

ω is kleinste oneindige ordinaalgetal: $N < \omega$ voor alle $N \in \mathbb{N}$

Bewijsbaarheid van Stelling van Goodstein

Peano Axioma's (PA):

1. $0 \in \mathbb{N}$
2. $a \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; a| \in \mathbb{N}$
3. $\forall\, a \in \mathbb{N} : a| \neq 0$
4. $a| = b| \;\Rightarrow\; a = b$
5. $0 \in S \;\wedge\; (\forall\, a \in \mathbb{N} : a \in S \;\Rightarrow\; a| \in S) \;\Rightarrow\; \mathbb{N} \subseteq S$

Axioma 5: Inductie (basis, stap),
vergelijk met omvallende rij dominostenen (begin, doortikken)

Onvolledigheidsstelling van Gödel over PA (1930):
Er bestaan ware uitspraken, die onbewijsbaar zijn in PA

Maar nu met 'echte' rekenkundige stelling die onbewijsbaar is in PA

Ordinaalgetallen t/m ω

Ruggengraat van de moderne verzamelingsleer

$\subset$ correspondeert met $<$

$\bigcup$ correspondeert met maximum nemen

$\bigcap$ correspondeert met minimum nemen

Rekenen met ordinaalgetallen

Opvolger (1 erbij): $\alpha| = \alpha \cup \{\alpha\}$

Limiet: $\bigcup_{\alpha \in A} \alpha \qquad \spadesuit \bowtie 1,\ \spadesuit \bowtie 2,\ \ldots \ \rightarrow\ \spadesuit \bowtie \omega = \bigcup_{\alpha \in \omega} \spadesuit \bowtie \alpha$

Optellen (herhaald 1 erbij)

Vermenigvuldigen (herhaald optellen)

Machtsverheffen (herhaald vermenigvuldigen)

Rekenen met ordinaalgetallen

Net als bij natuurlijke getallen, maar nu limiet erbij

$2| = \{0, 1\}| = \{0, 1, 2\} = 3$

Ook ω keer iets herhalen: $\omega * \omega = \overbrace{\omega + \cdots}^{\omega \times}$

Pas op met rekenen Niet alle regels gelden meer: $1 + \omega = \omega \neq \omega + 1$

$$2 * \omega \ = \ \overbrace{2 + \cdots}^{\omega \times} \ = \ \overbrace{1 + 1 + \cdots}^{\omega \times} \ = \ \overbrace{1 + \cdots}^{\omega \times} \ = \ 1 * \omega = \omega$$

$$\omega * 2 \ = \ \omega + \omega \ = \ \overbrace{1 + \cdots}^{\omega \times} + \overbrace{1 + \cdots}^{\omega \times} \ \neq \ \omega$$

Niet commutatief; wel associatief en $*$ distribueert van links over $+$

Meer oneindige ordinaalgetallen

$$\omega, \quad \omega + 1, \quad \omega + 2, \quad \overset{1}{\boxed{\cdots}}, \quad \omega + \omega = \omega * 2$$

$$\omega * 2 + 1, \quad \omega * 2 + 2, \quad \overset{1}{\boxed{\cdots}}, \quad \omega * 2 + \omega = \omega * 3$$

$$\overset{1}{\boxed{\cdots}}, \quad \omega * 4, \quad \overset{1}{\boxed{\cdots}}, \quad \omega * 5, \quad \overset{2}{\boxed{\cdots}}, \quad \omega * \omega = \omega^2$$

$$\omega^2 + 1, \quad \overset{1}{\boxed{\cdots}}, \quad \omega^2 + \omega, \quad \overset{2}{\boxed{\cdots}}, \quad \omega^2 + \omega^2 = \omega^2 * 2$$

$$\overset{2}{\boxed{\cdots}}, \quad \omega^2 * 3, \quad \overset{2}{\boxed{\cdots}}, \quad \omega^2 * 4, \quad \overset{3}{\boxed{\cdots}}, \quad \omega^2 * \omega = \omega^3$$

$$\overset{4}{\boxed{\cdots}}, \quad \omega^4, \quad \overset{5}{\boxed{\cdots}}, \quad \omega^5, \quad \overset{\omega}{\boxed{\cdots}}, \quad \omega^\omega$$

Meer oneindige ordinaalgetallen

Tot ω^2: $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, 1e kwadrant van 2-dimensionale rooster

$$\begin{array}{cccc}
\vdots & & & \\
\omega*3 & \ldots & & \\
\omega*2 & \omega*2+1 & \ldots & \\
\omega & \omega+1 & \omega+2 & \ldots \\
0 & 1 & 2 & \ldots
\end{array}$$

Tot ω^N in N-dimensionale rooster

Alternatief: $\mathbb{N}$ samenpersen op stukje van $\mathbb{Q}[0, 1)$: $n \rightarrow 1 - \frac{1}{2^n}$

Dan $[\omega, \omega*2) \rightarrow \mathbb{Q}[1, 1\frac{1}{2})$

I.h.a. $\omega*n \rightarrow 2 - \frac{1}{2^n}$, dan $\omega^2 \rightarrow 2$

Normaalvorm voor ordinaalgetallen $< \omega^\omega$

Normaalvorm van $\alpha < \omega^\omega$:

$$\alpha \;=\; \omega^k * c_k + \omega^{k-1} * c_{k-1} + \cdots + \omega^2 * c_2 + \omega * c_1 + c_0$$

waarbij k en alle c_i eindig zijn.

Vergelijk met decimale notatie:

$$N \;=\; 10^k * c_k + 10^{k-1} * c_{k-1} + \cdots + 10^2 * c_2 + 10 * c_1 + c_0$$

waarbij $0 \le c_i < 10$, maar nu onbegrensde coëfficiënten.

Zelfde structuur als eindige lijst natuurlijke getallen: $[c_k, c_{k-1}, \ldots c_1, c_0]$.

Op naar epsilon nul

$$0,\quad 1,\quad \ldots,\quad \omega,\quad \ldots,\quad \omega * 2,\quad \ldots,\quad \omega^2,\quad \ldots,\quad \omega^\omega$$

$$\omega^\omega + 1,\quad \ldots,\quad \omega^\omega * 2\quad \ldots,\quad \omega^\omega * \omega = \omega^{\omega+1}$$

$$\ldots,\quad \omega^{\omega * 2},\quad \ldots,\quad \omega^{\omega^2},\quad \ldots,\quad \omega^{\omega^\omega}$$

$$\ldots,\quad \omega^{\omega^{\omega^\omega}},\quad \ldots,\quad \underbrace{\omega^{\omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}}_{\omega\times} = \epsilon_0$$

ϵ_0 is kleinste oplossing van

$$\alpha \;=\; \omega^\alpha$$

Normaalvorm voor ordinaalgetallen $< \omega^\omega$

Ingewikkelder dan 1-dimensionale structuur van $\mathbb{N}$

Lijsten: typische datastructuur in informatica bij rekenprocessen

Oplossing voor lottobalspel: $c_i =$ aantal ballen met waarde i

Lexicografische ordening op lijsten over $\mathbb{N}$

Inbedden in $(\mathbb{Q}, <)$: $k + 0.\overbrace{1\cdots1}^{c_k}0\overbrace{1\cdots1}^{c_{k-1}}0\overbrace{\cdots\cdots}^{c_{k-2}\cdots c_1}0\overbrace{1\cdots1}^{c_0}000\cdots$
$c_k \neq 0$

Op naar epsilon nul

Dit is al lastiger te tekenen

In te bedden in $\mathbb{R}$

Elke verzameling kan wel-geordend worden (Zermelo, 1904; niet uniek)

Elke wel-geordende verzameling is isomorf met een ordinaalgetal

Andere kleinste oplossingen:

$$\begin{array}{lcll}
\alpha & = & 1 + \alpha & (\omega) \\
\alpha & = & \omega + \alpha & (\omega * \omega = \omega^2) \\
\alpha & = & 2 * \alpha \text{ voor } \alpha > 0 & (\omega) \\
\alpha & = & \omega * \alpha \text{ voor } \alpha > 0 & (\omega^\omega) \\
\alpha & = & 2^\alpha & (\omega)
\end{array}$$

Normaalvorm voor ordinaalgetallen $< \epsilon_0$

Normaalvorm van $\alpha < \epsilon_0$:

$$\alpha \;=\; \omega^{\beta_k} * c_k + \omega^{\beta_{k-1}} * c_{k-1} + \cdots + \omega^{\beta_0} * c_0$$

waarbij k en alle c_i eindig zijn en $c_i \neq 0$, en

$$\alpha > \beta_k > \beta_{k-1} > \cdots > \beta_0$$

Vergelijk met super-G-notatie, maar nu onbegrensde coëfficiënten.

Zelfde structuur als een boom met positieve natuurlijke getallen.

Normaalvorm voor ordinaalgetallen $< \epsilon_0$

Boom bij $\omega^{\omega+2} + \omega^2 * 2 + \omega + 2$ afgeleid van $f(266, 3)$

```
1
|
1 — 2     2     1
|         |     |
1 ——————— 2 ——— 1 — 2
```

Bomen: de ‘ultieme’ datastructuur in de informatica

Meer structuur dan lijsten, maar niet expressiever dan geneste lijsten

Let op dat $\alpha > \beta_k$ niet voor elke ordinaal α geldt

Wel geldt i.h.a. $\alpha \geq \beta_k$; gelijkheid bij $\alpha = \epsilon_0$, want $\epsilon_0 = \omega^{\epsilon_0}$

Bewijs van Stelling van Goodstein

Schrijf N in super-G-notatie.

Vervang hierin iedere G door ω.

Het resultaat $f(N, G)$ is een ordinaalgetal $< \epsilon_0$.

Bijvoorbeeld: $f(266, 2) = \omega^{\omega^{\omega+1}} + \omega^{\omega+1} + \omega$

Claim: Als N', G' de opvolger in de Goodstein-rij bij N, G is, dan is

$$f(N', G') < f(N, G)$$

Ordinaalgetallen zijn welgeordend: elke dalende rij eindigt.

Bewijs van Stelling van Goodstein

Dit hoeft u niet meteen te begrijpen

N.B. De Goodstein-operatie ‘-1’ is niet ordinaal-operatie ‘-1’

Samenvattend

- ∞ is geen getal (algebra), wel limiet (topologie)
- Kardinaalgetallen (aantal):

  0, 1, 2, $\aleph_0$, $\aleph_1$, $2^{\aleph_0} = c$, ...

- Ordinaalgetallen (rangorde):

  0, 1, 2, ω, $\omega + 1$, $\omega * 2$, ω^2, ω^ω, $\omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = \epsilon_0$, $\epsilon_0 + 1$, ...

Samenvattend

$\aleph_1 =$ eerstvolgende kardinaalgetal $> \aleph_0$

Verschil tussen $\aleph_1$ en $c = 2^{\aleph_0}$ is 'open'

Continuum Hypothese: $c = \aleph_1$

Alternatief: $\aleph_1 < c$

Filosofische (na)beschouwingen

Grootte van het wiskundige universium van

Brouwer : eindig met specifieke bovengrens

Baire : eindig zonder specifieke bovengrens

Borel : aftelbaar oneindig ($\aleph_0$, d.w.z. met heel $\mathbb{N}$)

Lebesgue : $c = 2^{\aleph_0}$, gelijkmachtig met het continuum $\mathbb{R}$

Zermelo : alomvattend

Filosofische (na)beschouwingen

Platonisme, formalisme, intuïtionisme, constructivisme

Verzameling van alle functies $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heeft cardinaliteit

$$\begin{aligned} c^c &= \left(2^{\aleph_0}\right)^c \\ &= 2^{\aleph_0 * c} \\ &= 2^c \\ &> c \end{aligned}$$