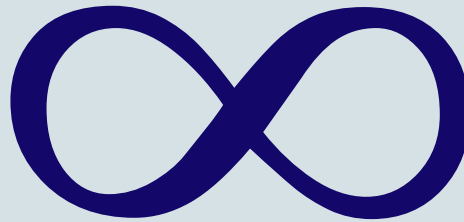


Oneindig in Wiskunde & Informatica

Lezing in de reeks *Oneindig*
3 oktober 2007 / Studium Generale TU Delft

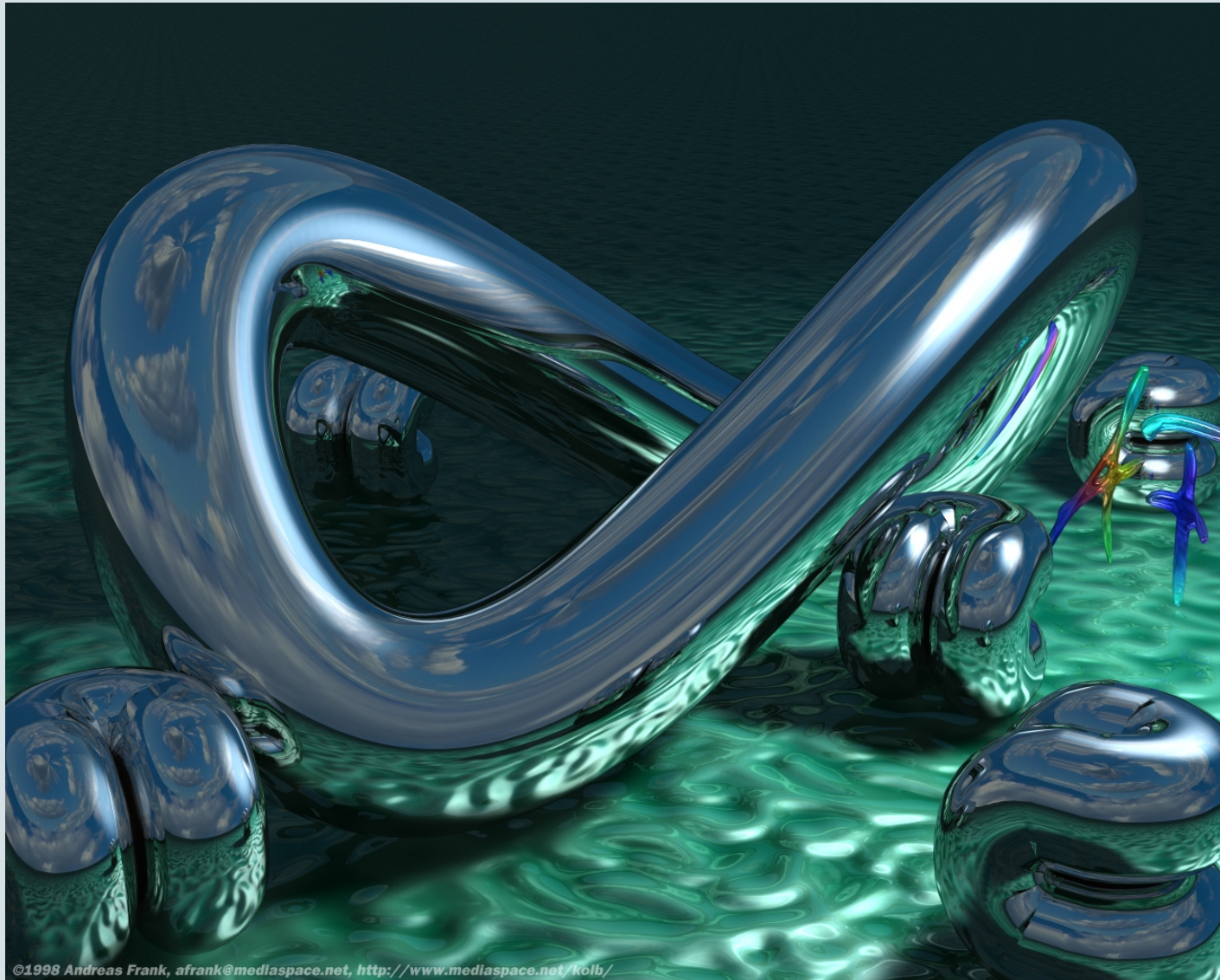


Tom Verhoeff

Technische Universiteit Eindhoven
Faculteit Wiskunde & Informatica

<http://www.win.tue.nl/~wstomv/>

Eindige en oneindige getallen



©1998 Andreas Frank, afrank@mediaspace.net, <http://www.mediaspace.net/kolb/>

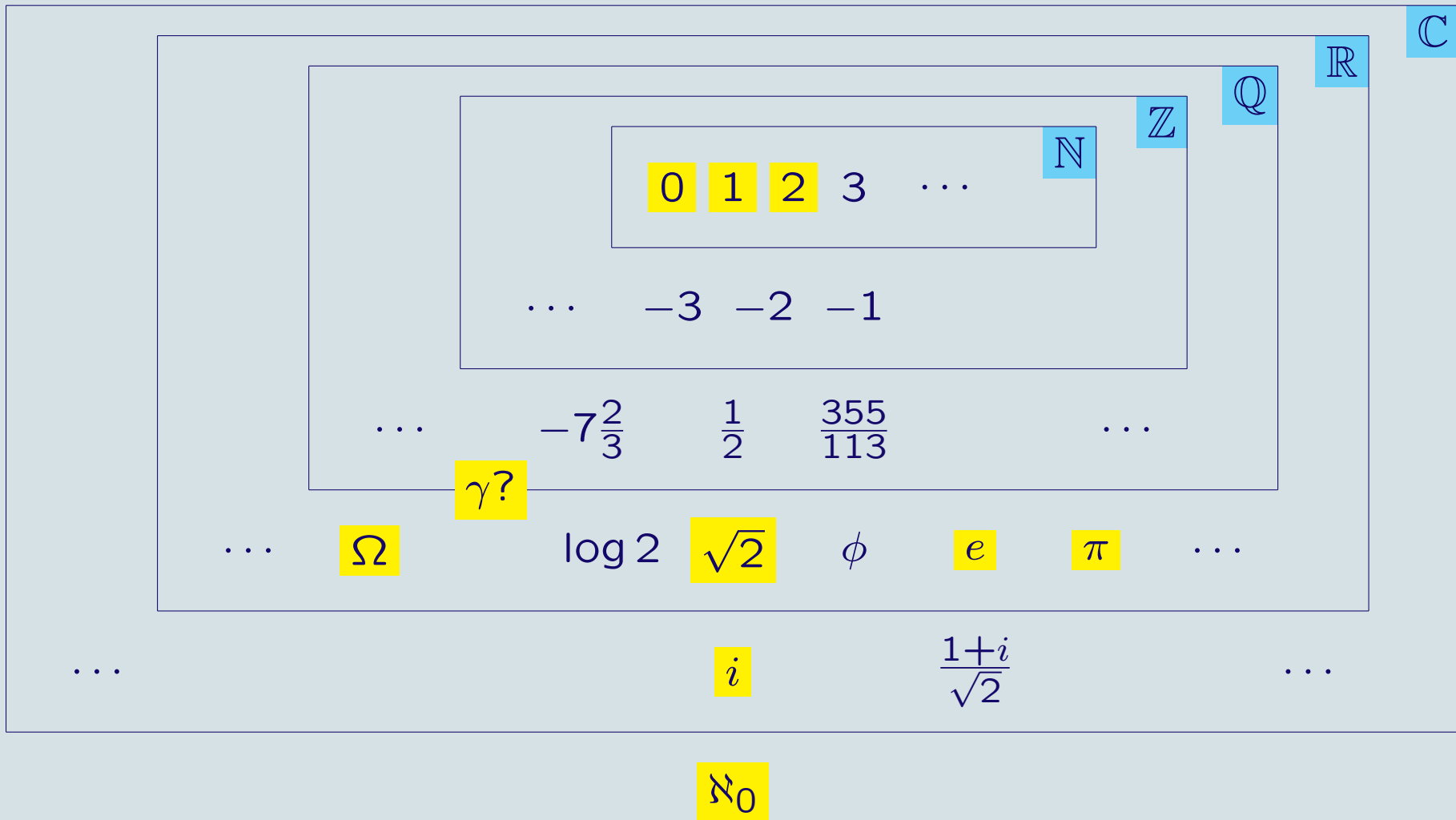
Top tien van getallen (Clifford Pickover, 2001)

1.	0		
2.	π	3.141592653...	Archimedes, Ludolph
3.	e	2.718281828...	Napier, Euler
4.	i	$\sqrt{-1}$	Gauss
5.	$\sqrt{2}$	1.414213562...	Pythagoras
6.	1		
7.	2		
8.	γ	0.5772156649...	Euler, Mascheroni
9.	Ω	<i>onberekenbaar</i>	Chaitin
10.	\aleph_0	<i>oneindig</i>	Cantor

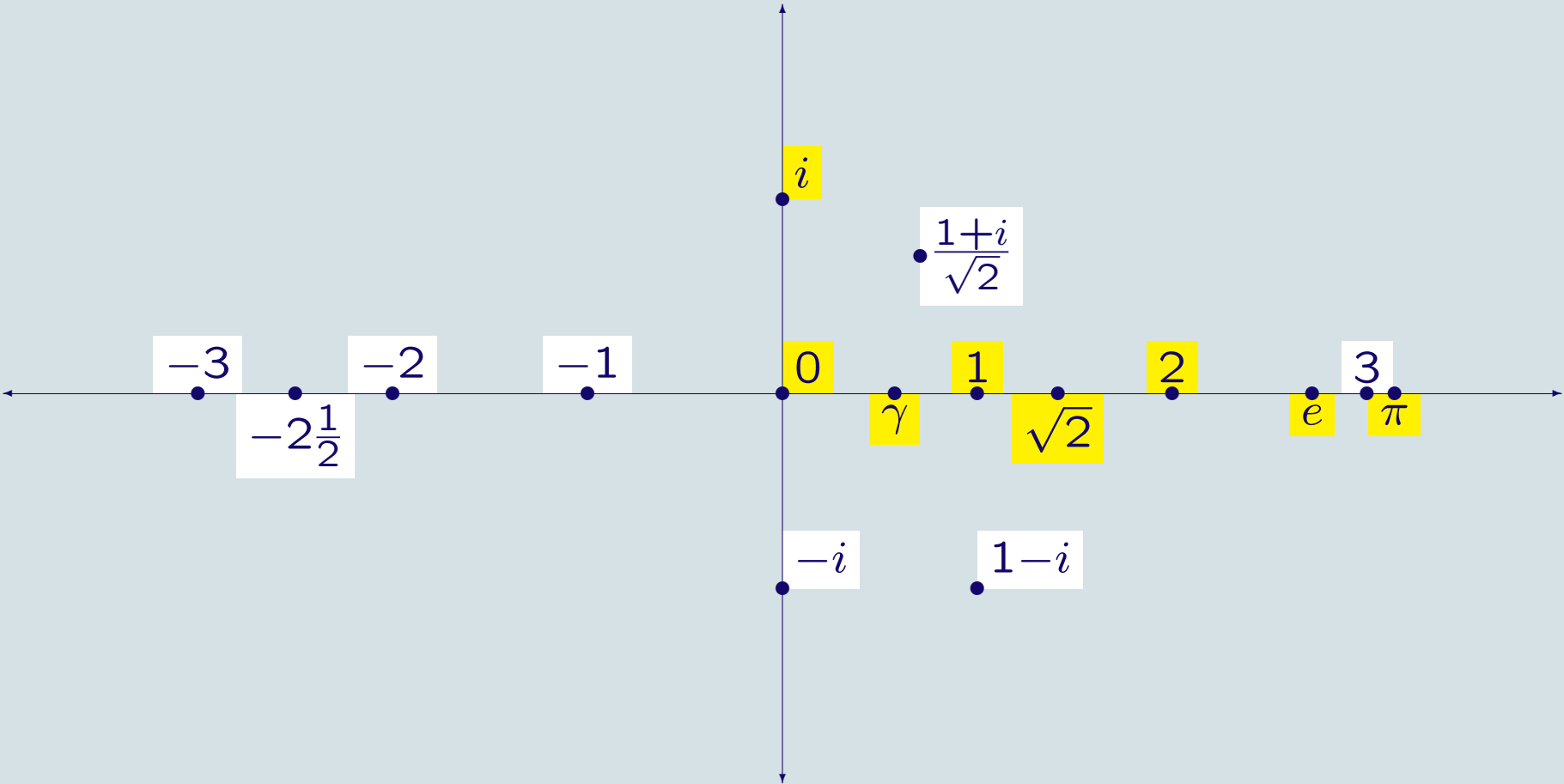
Getallen verzameld

- \mathbb{N} – Natuurlijke getallen: 0, 1, 2, ...
- \mathbb{Z} – Gehele getallen: ..., -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...
- \mathbb{Q} – Rationale getallen: ..., $-7\frac{2}{3}$, ..., $\frac{1}{2}$, ..., $\frac{355}{113}$, ...
- \mathbb{R} – Reële getallen: ..., γ , ..., $\sqrt{2}$, ..., e , ..., π , ..., Ω , ...
- \mathbb{C} – Complexe getallen: ..., i , ..., $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$, ...
- Keten van uitbreidingen: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

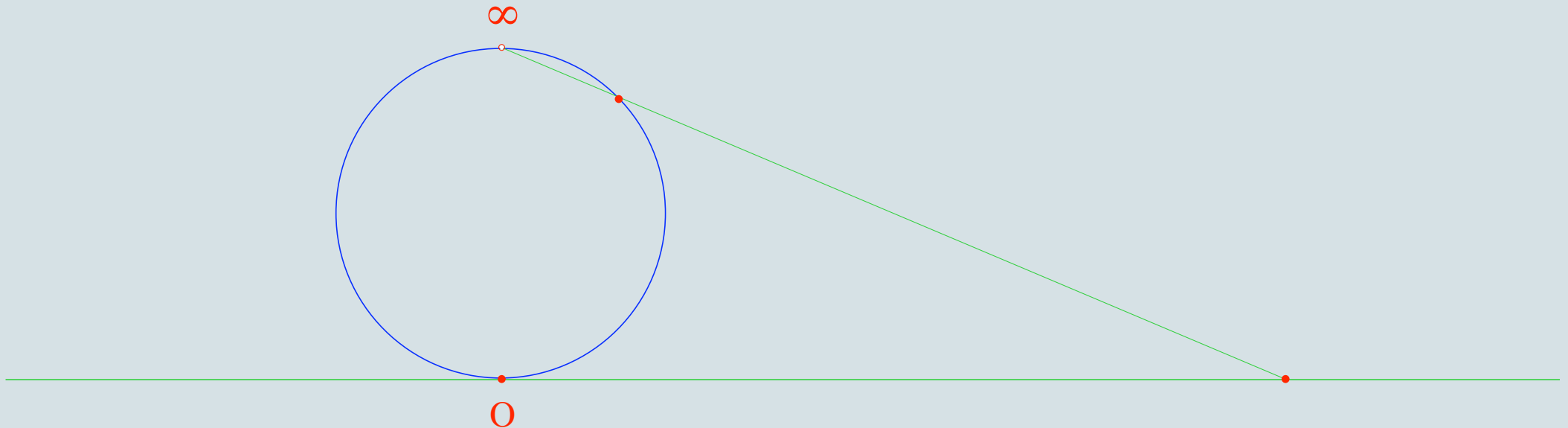
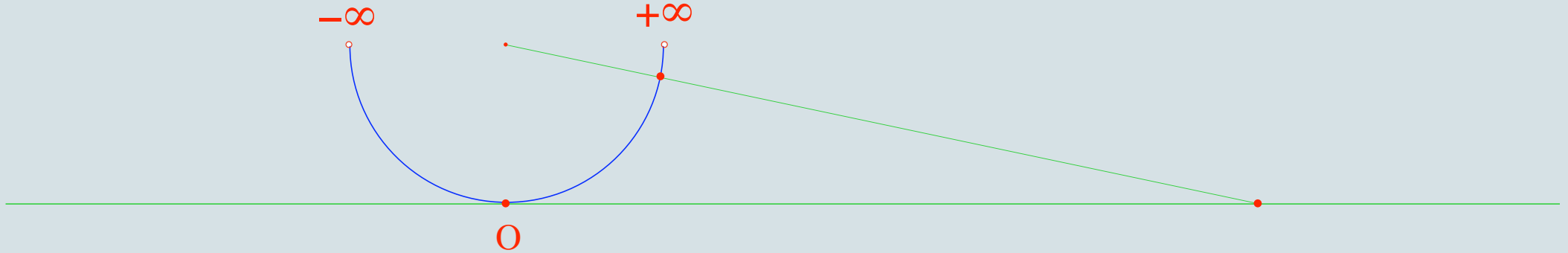
Geneste verzamelingen van getallen



Getallen als meetkundige punten: topologische structuur



Punt(en) op oneindig toevoegen



Bewerkingen op getallen: algebraïsche structuur

\mathbb{N} : $a+b$ (optellen), $a*b$ (vermenigvuldigen), a^b (machtsverheffen)

\mathbb{Z} : $a-b$ (aftrekken: $a = x+b$)

\mathbb{Q} : a/b (delen: $a = x * b$)

\mathbb{R} : $\sqrt[b]{a}$ (worteltrekken: $a = x^b$),

$\log_b a$ (logaritme: $a = b^x$)

\mathbb{C} : nulpunten van polynomen, bijv. $x^2 + 1 = 0$

Potentieel oneindige processen (...)

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \pm \dots$$

$$\frac{2}{\pi} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6} \dots$$

$$e = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$$

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}$$

Oneindig bij limiet van rij ($n \rightarrow \infty$)

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \rightarrow 0$$

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}$$

NIET: $\frac{1}{\infty}$

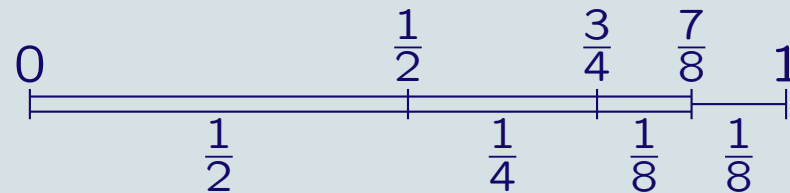
$$\left(1 + \frac{1}{1}\right)^1, \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2, \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3, \dots \rightarrow e$$

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

NIET: $\left(1 + \frac{1}{\infty}\right)^\infty$

Oneindig bij limiet van reeks ($\sum_{k=1}^{\infty}$)

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^n}$$



$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

$$\infty = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

Fictieve oneindige 'getallen'

- Topologisch: limiet $\rightarrow \infty$

Al dan niet onderscheid tussen $-\infty$ en $+\infty$

- Algebraïsch: bestaat niet

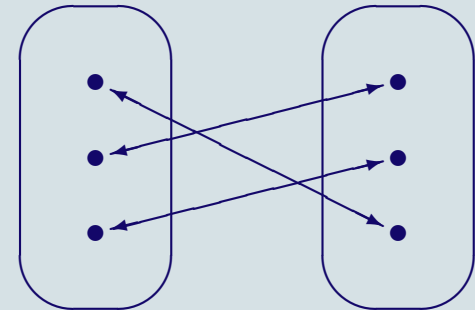
$\infty - 1 = ?$ ofwel $? + 1 = \infty$

'Echte' oneindige getallen

Kardinaalgetallen als maat voor grootte van verzamelingen:

0, 1, 2, 3, ..., \aleph_0 , ...

Gelijkmachtigheid: 1-1 correspondentie



Ordinaalgetallen als maat voor rangorde:

eerste, tweede, ..., ω , ..., ϵ_0 , ...

Wel-geordende rij: lineair, elke deelrij heeft minimum

Kardinaalgetallen: aftelbaarheid

$$\begin{array}{cccccccccc} \mathbb{N} = \{ & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \dots \} \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ \mathbb{N}^+ = \{ & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \dots \} \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ \mathbb{N}^{even} = \{ & 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 & \dots \} \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ \mathbb{Z} = \{ & 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & -3 & 3 & -4 & 4 & \dots \} \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ \mathbb{Q}^+ = \{ & \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{2}{1} & \frac{1}{3} & \frac{3}{1} & \frac{1}{4} & \frac{2}{3} & \frac{3}{2} & \frac{4}{1} & \dots \} \end{array}$$

$$|\mathbb{N}| = \aleph_0$$

Kardinaalgetallen: overaftelbaarheid

$a \in V$	\leftrightarrow	deelverzameling $S_a \subseteq V$
		0 1 2 3 ...
0	\leftrightarrow	● ○ ○ ○
1	\leftrightarrow	○ ○ ● ○
2	\leftrightarrow	● ● ○ ○
3	\leftrightarrow	○ ○ ● ●
⋮		
?	\leftrightarrow	○ ● ● ○
		complement van diagonaal

$$|V| < |2^V| = 2^{|V|}$$

$$\aleph_0 = |\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| < |\mathbb{R}| = |\mathbb{C}| = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$$

Informatica: Eindiging van 'reken'processen

Termherschrijfsysteem:

- Begin met eindig rijtje over $\{a, b, c\}$
- Vervang herhaaldelijk deelrijtjes:

$$aa \rightarrow bc$$

$$bb \rightarrow ac$$

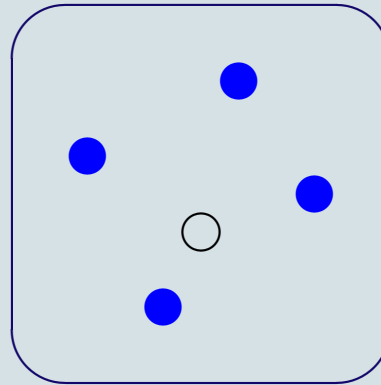
$$cc \rightarrow ab$$

Voorbeeld:

$bb\underline{aa} \rightarrow \underline{bb}bc \rightarrow b\underline{acc} \rightarrow \underline{ba}ab \rightarrow \underline{bb}cb \rightarrow \underline{acc}b \rightarrow \underline{aabb} \rightarrow \underline{aa}ac \rightarrow \underline{ab}cc \rightarrow abab$

Eindigt dit voor elk beginrijtje?

Knikerspel 1

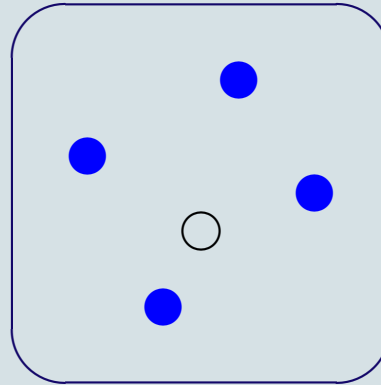


Pak telkens een knikker:

- Verwijder 'm

Eindigt dit? Na hoeveel zetten?

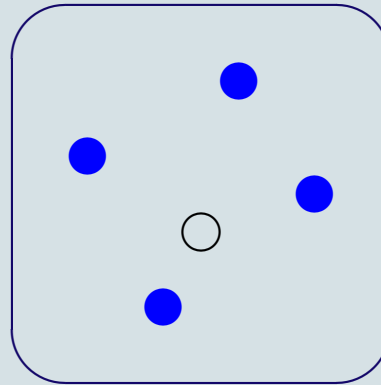
Knikerspel 2



Pak telkens een knikker:

- Als blauw, dan verwijderen
- Als wit, dan vervangen door één blauwe

Knikerspel 3



Pak telkens een knikker:

- Als blauw, dan verwijderen
- Als wit, dan vervangen door willekeurig eindig aantal blauwe

Knikerspel analyse

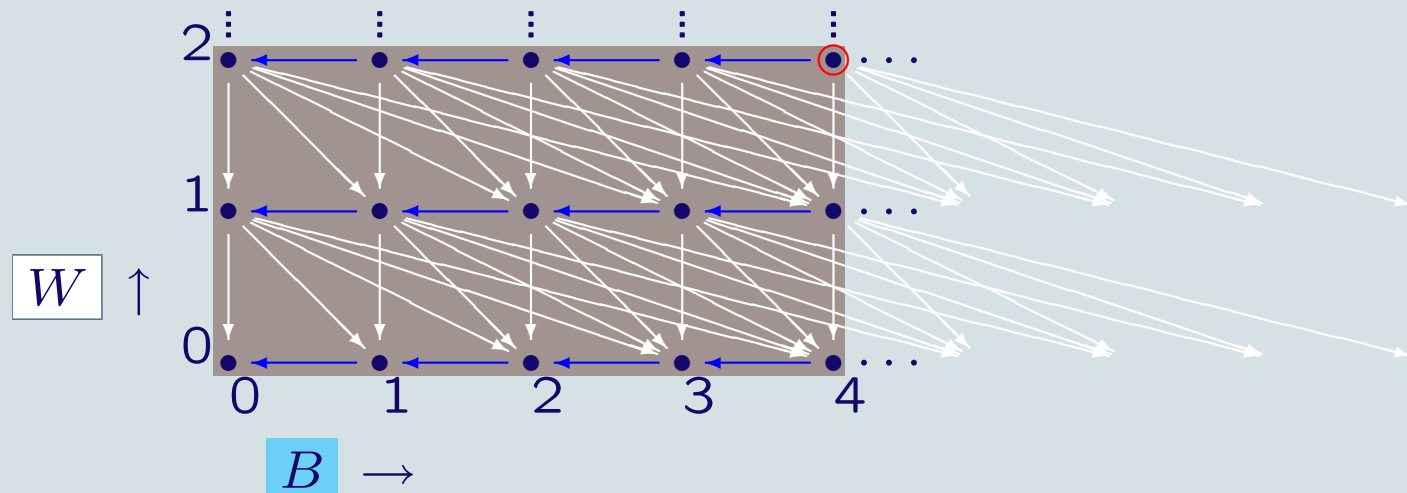
W witte knikers

B blauwe knikers

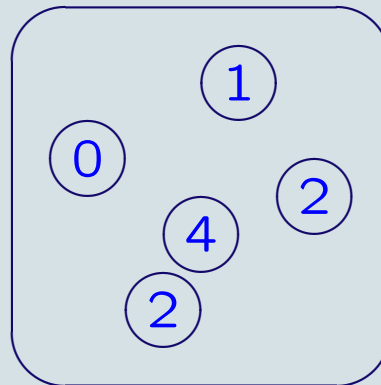
Spel 1. Eindigt na $W + B$ stappen

Spel 2. Eindigt na $2 * W + B$ stappen

Spel 3. Eindigt na ten hoogste $\omega * W + B$ stappen



Lottobalspel



Pak telkens een \mathbb{N} -genummerde lottobal:

- Vervang door willekeurig aantal met kleinere waarden

d.w.z. (n) vervangen door $(<n) (<n) \cdots (<n)$

Bewerkingen op natuurlijke getallen

Opvolger (1 erbij): $a|$

Optellen (herhaald 1 erbij): $a + b = a \overbrace{|\cdots|}^{b \times}$

Vermenigvuldigen (herhaald optellen): $a * b = \overbrace{a + \cdots + a}^{b \times}$

$$a * 0 = 0 \quad a * 1 = a \quad a * b| = a * b + a \quad a * (b + c) = a * b + a * c$$

Machtsverheffen (herhaald vermenigvuldigen): $a^b = \overbrace{a * \cdots * a}^{b \times}$

$$a^0 = 1 \quad a^1 = a \quad a^{b|} = a^b * a \quad a^{b+c} = a^b * a^c$$

Decimale notatie

Ieder natuurlijk getal is op *unieke* wijze te schrijven als

som van machten van 10 met coëfficiënten < 10 .

Voorbeeld:

$$\begin{aligned} 266 &= 200 + 60 + 6 \\ &= 2 * 100 + 6 * 10 + 6 * 1 \\ &= 2 * 10^2 + 6 * 10^1 + 6 * 10^0 \end{aligned}$$

Notatie in grondtal $G \geq 2$

Ieder natuurlijk getal is op *unieke* wijze te schrijven als

som van machten van G met coëfficiënten $< G$.

Voorbeeld met $G = 2$ (*binair*):

$$\begin{aligned} 266 &= 256 + 8 + 2 \\ &= 2^8 + 2^3 + 2^1 \end{aligned}$$

Voorbeeld met $G = 3$ (*ternair*):

$$\begin{aligned} 266 &= 243 + 18 + 3 + 2 \\ &= 3^5 + 2 * 3^2 + 3^1 + 2 * 3^0 \end{aligned}$$

Super- G -notatie met grondtal $G \geq 2$

1. Noteer in grondtal G .
2. Herhaal met de *exponenten*.
3. Stop zodra alle getallen $\leq G$.

Voorbeeld:

$G = 2$	$G = 3$
$266 = 2^8 + 2^3 + 2$	$266 = 3^5 + 2 * 3^2 + 3^1 + 2$
$= 2^{2^3} + 2^{2+1} + 2$	$= 3^{3+2} + 2 * 3^2 + 3^1 + 2$
$= 2^{2^{2+1}} + 2^{2+1} + 2$	

Goodstein-rij van $N > 0$ en $G \geq 2$

$$N = 8 \quad G = 2$$

1. Schrijf N in **super- G -notatie**.

$$8 = 2^{2+1}$$

2. Vervang hierin elke G door $G + 1$.

$$3^{3+1} = 81$$

3. Verminder met 1; geeft nieuwe N .

$$N' = 80$$

4. Verhoog G met 1.

$$G' = 3$$

5. Stop als $N = 0$, anders vanaf stap 1 herhalen.

Goodstein-rij bij $N = 266$ en $G = 2$

Volgnr.	N	G
1	266 $2^{2^{2+1}} + 2^{2+1} + 2$	2
2	$3^{3^{3+1}} + 3^{3+1} + 3 - 1$ 443...886 (39 cijfers) $3^{3^{3+1}} + 3^{3+1} + 2$	3
3	$4^{4^{4+1}} + 4^{4+1} + 2 - 1$ 323...681 (617 cijfers) $4^{4^{4+1}} + 4^{4+1} + 1$	4
4	$5^{5^{5+1}} + 5^{5+1} + 1 - 1$... (> 10 000 cijfers) $5^{5^{5+1}} + 5^{5+1}$	5

Stelling van Goodstein (1944)

Elke Goodstein-rij eindigt met $N = 0$.

't Kan even duren:

- $N = 3, G = 2$ eindigt na 5 stappen
- $N = 4, G = 2$ eindigt na $3 * 2^{402\,653\,211} - 3 \approx 10^{10^8}$ stappen

Bewijsbaarheid van Stelling van Goodstein

Stelling van Kirby en Paris (1982):

De Stelling van Goodstein volgt *niet* uit de Peano Axioma's.

'Gewone' inductie is niet toereikend, Goodstein rij 'groeit te snel'.

Elk bewijs van de Stelling van Goodstein vergt (een vorm van) *transfinitie* inductie zoals met *ordinaalgetallen*.

Ordinaalgetallen t/m ω

Ordinaalgetal is verzameling van al zijn voorgangers:

$$0 = \{ \}$$

$$1 = \{ 0 \}$$

$$2 = \{ 0, 1 \}$$

$$3 = \{ 0, 1, 2 \}$$

\vdots

$$N = \{ 0, 1, 2, \dots, N-1 \}$$

\vdots

$$\omega = \{ 0, 1, 2, \dots \}$$

ω is kleinste oneindige ordinaalgetal: $N < \omega$ voor alle $N \in \mathbb{N}$

Rekenen met ordinaalgetallen

Opvolger (1 erbij): $\alpha| = \alpha \cup \{\alpha\}$

Limiet: $\bigcup_{\alpha \in A} \alpha$ ♠ $\times 1, \spadesuit \times 2, \dots \rightarrow \spadesuit \times \omega = \bigcup_{\alpha \in \omega} \spadesuit \times \alpha$

Optellen (herhaald 1 erbij)

Vermenigvuldigen (herhaald optellen)

Machtsverheffen (herhaald vermenigvuldigen)

Meer oneindige ordinaalgetallen

$$\omega, \quad \omega + 1, \quad \omega + 2, \quad \begin{array}{c} 1 \\ \dots \end{array}, \quad \omega + \omega = \omega * 2$$

$$\omega * 2 + 1, \quad \omega * 2 + 2, \quad \begin{array}{c} 1 \\ \dots \end{array}, \quad \omega * 2 + \omega = \omega * 3$$

$$\begin{array}{c} 1 \\ \dots \end{array}, \quad \omega * 4, \quad \begin{array}{c} 1 \\ \dots \end{array}, \quad \omega * 5, \quad \begin{array}{c} 2 \\ \dots \end{array}, \quad \omega * \omega = \omega^2$$

$$\omega^2 + 1, \quad \begin{array}{c} 1 \\ \dots \end{array}, \quad \omega^2 + \omega, \quad \begin{array}{c} 2 \\ \dots \end{array}, \quad \omega^2 + \omega^2 = \omega^2 * 2$$

$$\begin{array}{c} 2 \\ \dots \end{array}, \quad \omega^2 * 3, \quad \begin{array}{c} 2 \\ \dots \end{array}, \quad \omega^2 * 4, \quad \begin{array}{c} 3 \\ \dots \end{array}, \quad \omega^2 * \omega = \omega^3$$

$$\begin{array}{c} 4 \\ \dots \end{array}, \quad \omega^4, \quad \begin{array}{c} 5 \\ \dots \end{array}, \quad \omega^5, \quad \begin{array}{c} \omega \\ \dots \end{array}, \quad \omega^\omega$$

Normaalvorm voor ordinaalgetallen $< \omega^\omega$

Normaalvorm van $\alpha < \omega^\omega$:

$$\alpha = \omega^k * c_k + \omega^{k-1} * c_{k-1} + \dots + \omega^2 * c_2 + \omega * c_1 + c_0$$

waarbij k en alle c_i eindig zijn.

Vergelijk met **decimale notatie**:

$$N = 10^k * c_k + 10^{k-1} * c_{k-1} + \dots + 10^2 * c_2 + 10 * c_1 + c_0$$

waarbij $0 \leq c_i < 10$, maar nu **onbegrensde coëfficiënten**.

Zelfde structuur als eindige **lijst** natuurlijke getallen: $[c_k, c_{k-1}, \dots, c_1, c_0]$.

Op naar epsilon nul

$$\begin{aligned}
 &0, \quad 1, \quad \dots, \quad \omega, \quad \dots, \quad \omega * 2, \quad \dots, \quad \omega^2, \quad \dots, \quad \omega^\omega \\
 &\omega^\omega + 1, \quad \dots, \quad \omega^\omega * 2 \quad \dots, \quad \omega^\omega * \omega = \omega^{\omega+1} \\
 &\dots, \quad \omega^{\omega*2}, \quad \dots, \quad \omega^{\omega^2}, \quad \dots, \quad \omega^{\omega^\omega} \\
 &\dots, \quad \omega^{\omega^{\omega^\omega}}, \quad \dots, \quad \underbrace{\omega^{\omega^{\omega^{\omega^{\dots}}}}}_{\omega \times} = \epsilon_0
 \end{aligned}$$

ϵ_0 is kleinste oplossing van

$$\alpha = \omega^\alpha$$

Normaalvorm voor ordinaalgetallen $< \epsilon_0$

Normaalvorm van $\alpha < \epsilon_0$:

$$\alpha = \omega^{\beta_k} * c_k + \omega^{\beta_{k-1}} * c_{k-1} + \dots + \omega^{\beta_0} * c_0$$

waarbij k en alle c_i eindig zijn en $c_i \neq 0$, en

$$\alpha > \beta_k > \beta_{k-1} > \dots > \beta_0$$

Vergelijk met **super- G -notatie**, maar nu **onbegrensde coëfficiënten**.

Zelfde structuur als een **boom** met positieve natuurlijke getallen.

Bewijs van Stelling van Goodstein

Schrijf N in super- G -notatie.

Vervang hierin iedere G door ω .

Het resultaat $f(N, G)$ is een ordinaalgetal $< \epsilon_0$.

Bijvoorbeeld: $f(266, 2) = \omega^{\omega^{\omega+1}} + \omega^{\omega+1} + \omega$

Claim: Als N', G' de opvolger in de Goodstein-rij bij N, G is, dan is

$$f(N', G') < f(N, G)$$

Ordinaalgetallen zijn **welgeordend**: elke dalende rij eindigt.

Samenvattend

- ∞ is geen getal (algebra), wel limiet (topologie)

- Kardinaalgetallen (aantal):

$$0, 1, 2, \aleph_0, \aleph_1, 2^{\aleph_0} = c, \dots$$

- Ordinaalgetallen (rangorde):

$$0, 1, 2, \omega, \omega + 1, \omega * 2, \omega^2, \omega^\omega, \omega^{\omega^{\omega^{\dots}}} = \epsilon_0, \epsilon_0 + 1, \dots$$

Filosofische (na)beschouwingen

Grootte van het wiskundige universium van

Brouwer : eindig met specifieke bovengrens

Baire : eindig zonder specifieke bovengrens

Borel : aftelbaar oneindig (\aleph_0 , d.w.z. met heel \mathbb{N})

Lebesgue : $c = 2^{\aleph_0}$, gelijkmachtig met het continuüm \mathbb{R}

Zermelo : alomvattend

Vragen?

