Oneindig (als getal)

Tom Verhoeff

Technische Universiteit Eindhoven
Faculteit Wiskunde en Informatica

`T.Verhoeff@TUE.NL`
`http://www.win.tue.nl/~wstomv/`

. . .

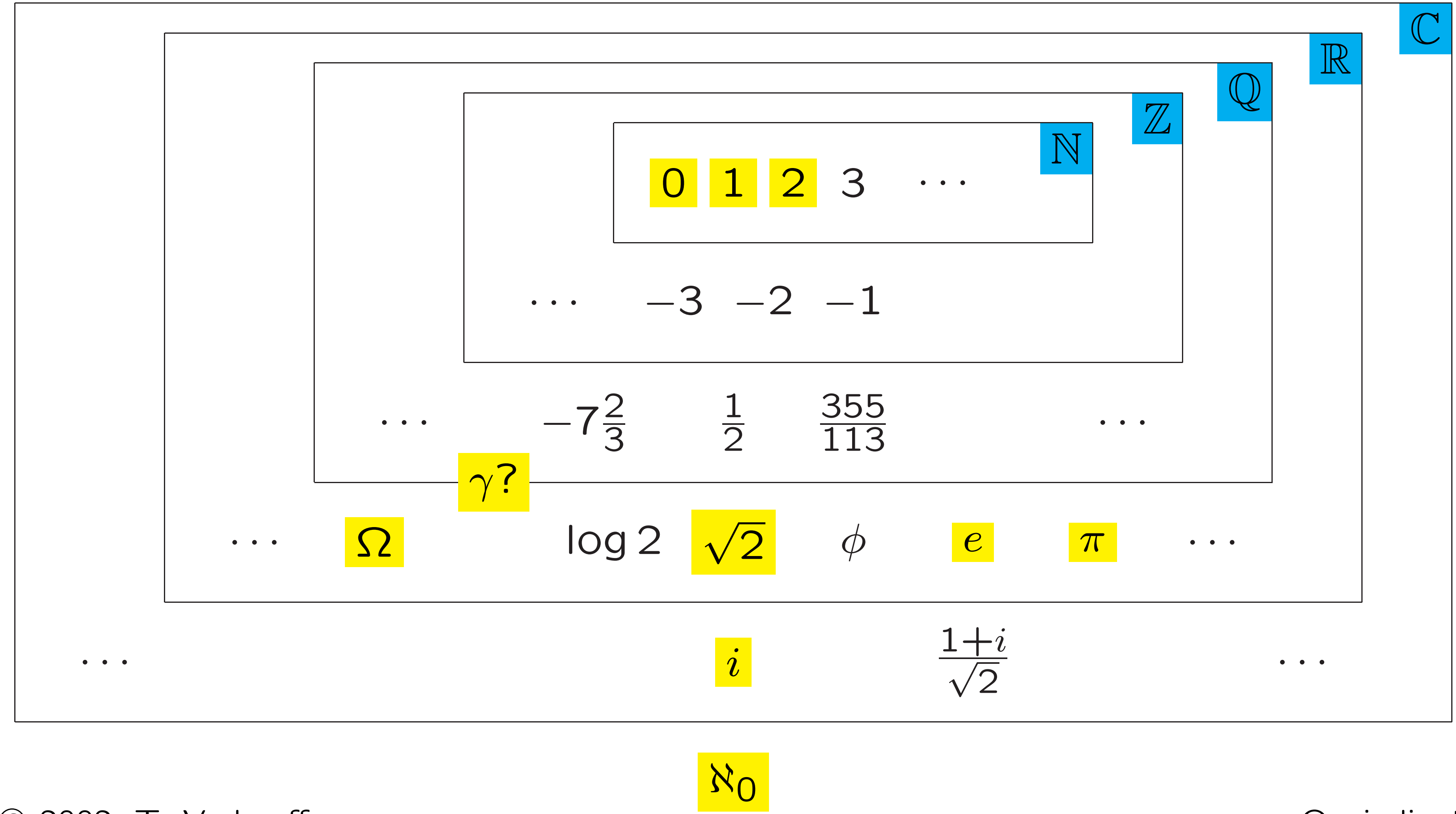
Top tien van getallen (Clifford Pickover, 2001)

1.	0		
2.	π	3.141592653 . . .	Archimedes, Ludolph
3.	e	2.718281828 . . .	Napier, Euler
4.	i	$\sqrt{-1}$	Gauss
5.	$\sqrt{2}$	1.414213562 . . .	Pythagoras
6.	1		
7.	2		
8.	γ	0.5772156649 . . .	Euler, Mascheroni
9.	Ω	*onberekenbaar*	Chaitin
10.	$\aleph_0$	*oneindig*	Cantor

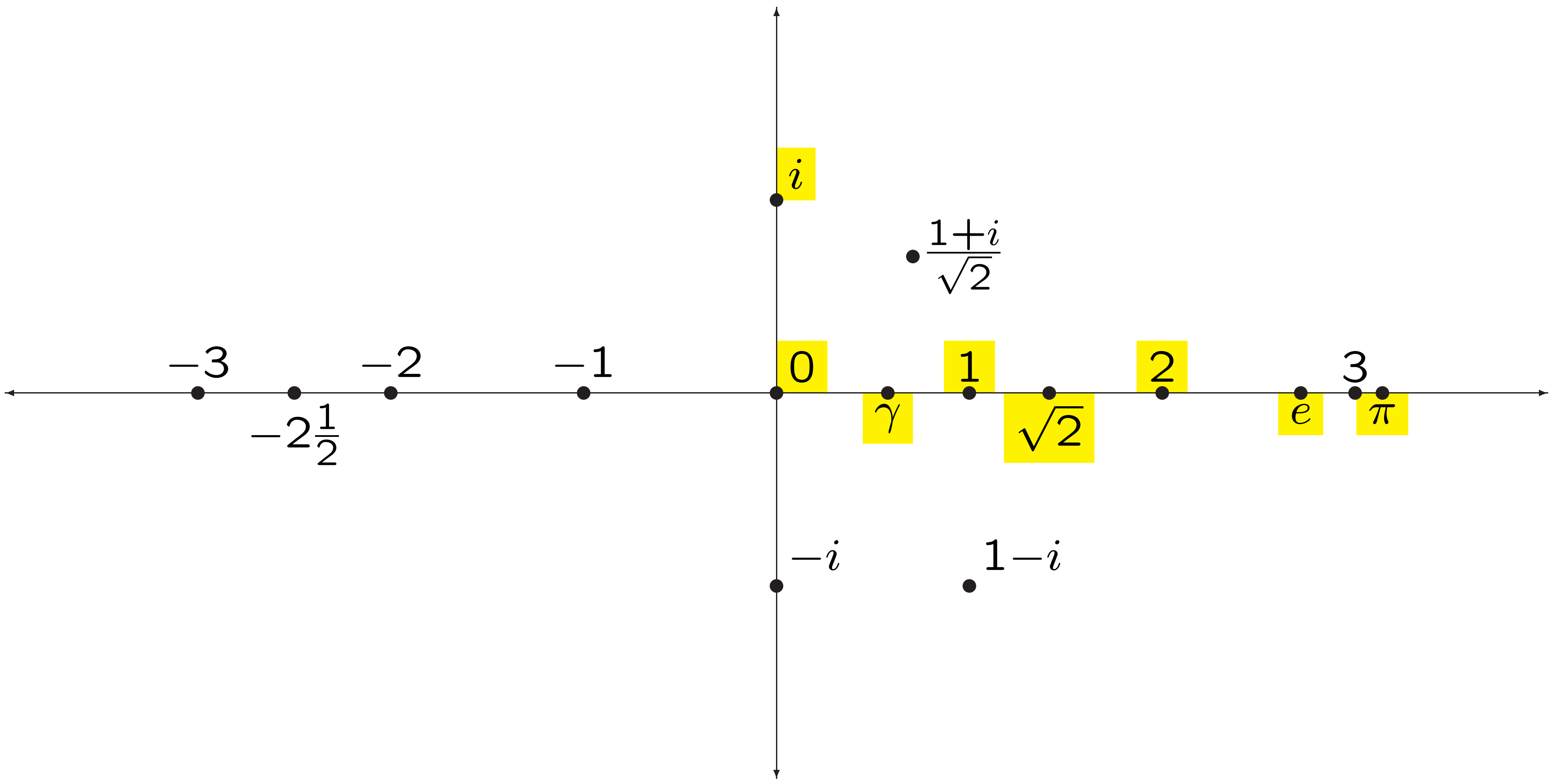
Getallen verzameld

- $\mathbb{N}$ – Natuurlijke getallen: $0,\ 1,\ 2,\ \ldots$
- $\mathbb{Z}$ – Gehele getallen: $\ldots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$
- $\mathbb{Q}$ – Rationele getallen: $\ldots,\ -7\frac{2}{3},\ \ldots,\ \frac{1}{2},\ \ldots,\ \frac{355}{113},\ \ldots$
- $\mathbb{R}$ – Reële getallen: $\ldots,\ \gamma,\ \ldots,\ \sqrt{2},\ \ldots,\ e,\ \ldots,\ \pi,\ \ldots,\ \Omega,\ \ldots$
- $\mathbb{C}$ – Complexe getallen: $\ldots,\ i,\ \ldots,\ \frac{1+i}{\sqrt{2}},\ \ldots$
- Keten van uitbreidingen: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Geneste verzamelingen van getallen



Getallen als meetkundige punten: topologische structuur



Bewerkingen op getallen: algebraïsche structuur

$\mathbb{N}$: $a+b$ (optellen), $a*b$ (vermenigvuldigen), a^b (machtsverheffen)

$\mathbb{Z}$: $a-b$ (aftrekken: $a = x+b$)

$\mathbb{Q}$: a/b (delen: $a = x * b$)

$\mathbb{R}$: $\sqrt[b]{a}$ (worteltrekken: $a = x^b$),

$\log_b a$ (logaritme: $a = b^x$)

$\mathbb{C}$: nulpunten van polynomen, bijv. $x^2 + 1 = 0$

Potentieel oneindige processen (. . .)

$$\frac{\boxed{\pi}}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + - \dots$$

$$\frac{2}{\boxed{\pi}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdot \dots$$

$$\boxed{e} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$$

$$\boxed{\sqrt{2}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \dots}}}$$

Oneindig bij limiet van rij $(n \to \infty)$

$$\frac{1}{1}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \ldots \quad \longrightarrow \quad \boxed{0}$$

$$\boxed{0} \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$$

NIET: $\frac{1}{\infty}$

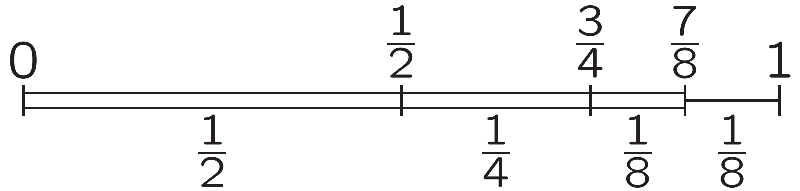
$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1, \quad \left(1+\frac{1}{2}\right)^2, \quad \left(1+\frac{1}{3}\right)^3, \quad \ldots \quad \longrightarrow \quad \boxed{e}$$

$$\boxed{e} \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

NIET: $\left(1+\frac{1}{\infty}\right)^\infty$

Oneindig bij limiet van reeks ($\sum_{k=1}^{\infty}$)

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n} = \boxed{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}} = 1-\frac{1}{2^n}$$



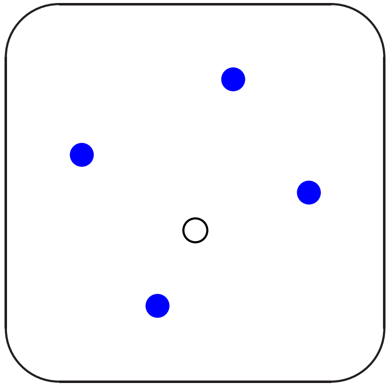
$$\boxed{1} = \sum_{k=1}^{\boxed{\infty}}\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$$

$$\boxed{\infty} = \sum_{k=1}^{\boxed{\infty}}\frac{1}{k} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$$

Oneindige getallen

- Topologisch: limiet $\longrightarrow \boxed{\infty}$
- Algebraïsch: bestaat niet ($\infty - 1 = \;?$ ofwel $? + 1 = \infty$)
- Maat voor grootte van verzamelingen: **kardinaalgetallen** als $\aleph_0$
- ‘Maat’ voor ordeningen: **ordinaalgetallen** als ω en ϵ_0

Knikkerspel 1

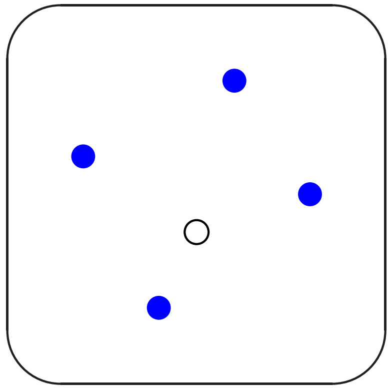


Pak telkens een knikker:

- Verwijder 'm

Eindigt dit? Na hoeveel zetten?

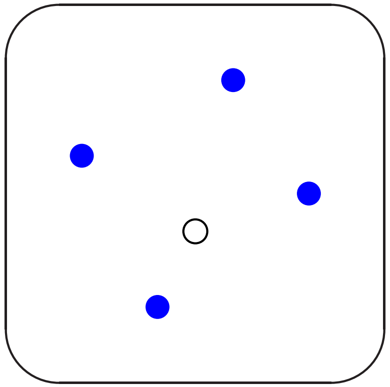
Knikkerspel 2



Pak telkens een knikker:

- Als blauw, dan verwijderen
- Als wit, dan vervangen door één blauwe

Knikkerspel 3



Pak telkens een knikker:

- Als blauw, dan verwijderen
- Als wit, dan vervangen door willekeurig eindig aantal blauwen

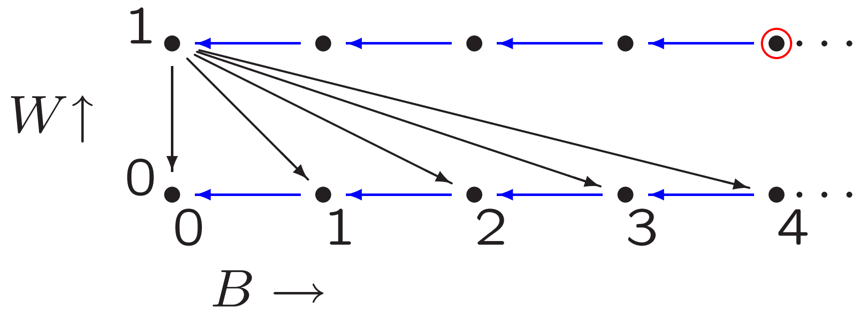
Knikkerspel analyse

W witte knikkers $\qquad$ B blauwe knikkers

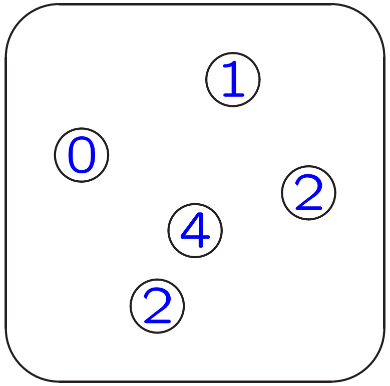
1. Eindigt na $W + B$ stappen

2. Eindigt na $2 * W + B$ stappen

3. Eindigt na ten hoogste $\omega * W + B$ stappen



Lottobalspel



Pak telkens een $\mathbb{N}$-genummerde lottobal:

- Vervang door willekeurig aantal met kleinere waarden

  d.w.z. (n) vervangen door ($<n$) ($<n$) . . . ($<n$)

Bewerkingen op natuurlijke getallen

Opvolger (1 erbij): $a|$

Optellen (herhaald 1 erbij): $a + b = a\overbrace{|\ldots|}^{b\times}$

Vermenigvuldigen (herhaald optellen): $a * b = \overbrace{a + \ldots + a}^{b\times}$

$a * 0 = 0 \qquad a * 1 = a \qquad a * b| = a * b + a \qquad a * (b + c) = a * b + a * c$

Machtsverheffen (herhaald vermenigvuldigen): $a^b = \overbrace{a * \ldots * a}^{b\times}$

$a^0 = 1 \qquad a^1 = a \qquad a^{b|} = a^b * a \qquad a^{b+c} = a^b * a^c$

Decimale notatie

Ieder natuurlijk getal is op *unieke* wijze te schrijven als

som van machten van 10 met coëfficiënten < 10.

Voorbeeld:

$$
\begin{aligned}
266 &= 200 + 60 + 6 \\
&= 2 * 100 + 6 * 10 + 6 * 1 \\
&= 2 * 10^2 + 6 * 10^1 + 6 * 10^0
\end{aligned}
$$

Notatie in grondtal $G \geq 2$

Ieder natuurlijk getal is op *unieke* wijze te schrijven als

som van machten van G met coëfficiënten $< G$.

Voorbeeld met $G = 2$ (*binair*):

$$\begin{aligned} 266 &= 256 + 8 + 2 \\ &= 2^8 + 2^3 + 2^1 \end{aligned}$$

Voorbeeld met $G = 3$ (*ternair*):

$$\begin{aligned} 266 &= 243 + 18 + 3 + 2 \\ &= 3^5 + 2 * 3^2 + 3^1 + 2 * 3^0 \end{aligned}$$

Super-G-notatie met grondtal $G \geq 2$

1. Noteer in grondtal G.

2. Herhaal met de *exponenten*.

3. Stop zodra alle getallen $\leq G$.

Voorbeeld met $G = 2$:

$$\begin{aligned} 266 &= 2^8 + 2^3 + 2 \\ &= 2^{2^3} + 2^{2+1} + 2 \\ &= \boxed{2^{2^{2+1}} + 2^{2+1} + 2} \end{aligned}$$

Goodstein-rij van $N > 0$ en $G \geq 2$

$N = 8 \quad G = 2$

1. Schrijf N in super-G-notatie. $8 = 2^{2+1}$

2. Vervang hierin elke G door $G + 1$. $3^{3+1} = 81$

3. Verlaag nieuwe N met 1. $N' = 80$

4. Verhoog G met 1. $G' = 3$

5. Stop als $N = 0$, anders vanaf stap 1 herhalen.

Goodstein-rij bij $N = 266$ en $G = 2$

Volgnr.	N	G
1	266	2
	$2^{2^{2+1}} + 2^{2+1} + 2$	
	$3^{3^{3+1}} + 3^{3+1} + 3 - 1$	
2	$443 \ldots 886$ (39 cijfers)	3
	$3^{3^{3+1}} + 3^{3+1} + 2$	
	$4^{4^{4+1}} + 4^{4+1} + 2 - 1$	
3	$323 \ldots 681$ (617 cijfers)	4
	$4^{4^{4+1}} + 4^{4+1} + 1$	
	$5^{5^{5+1}} + 5^{5+1} + 1 - 1$	
4	$\ldots$ ($>$ 10 000 cijfers)	5
	$5^{5^{5+1}} + 5^{5+1}$	

Stelling van Goodstein (1944)

Elke Goodstein-rij eindigt met $N = 0$.

't Kan even duren:

- $N = 3$, $G = 2$ eindigt na 5 stappen
- $N = 4$, $G = 2$ eindigt na $3 * 2^{402\,653\,211} - 3 \approx 10^{10^8}$ stappen

Bewijsbaarheid van Stelling van Goodstein

Stelling van Kirby en Paris (1982):

De Stelling van Goodstein volgt *niet* uit de Peano Axioma's.

'Gewone' inductie is niet toereikend, Goodstein rij 'groeit te snel'.

Elk bewijs van de Stelling van Goodstein vergt (een vorm van) *transfiniete* inductie zoals met *ordinaalgetallen*.

Ordinaalgetallen t/m ω

Ordinaalgetal is verzameling van al zijn voorgangers:

$$\begin{aligned}
0 &= \{\,\} \\
1 &= \{0\} \\
2 &= \{0,\ 1\} \\
3 &= \{0,\ 1,\ 2\} \\
&\ \vdots \\
N &= \{0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N-1\} \\
&\ \vdots \\
\omega &= \{0,\ 1,\ 2,\ \ldots\}
\end{aligned}$$

ω is kleinste oneindige ordinaalgetal: $N < \omega$ voor alle $N \in \mathbb{N}$

Rekenen met ordinaalgetallen

Opvolger (1 erbij): $\alpha| = \alpha \cup \{\, \alpha \,\}$

Limiet: $\bigcup_{\alpha \in A} \alpha \qquad \spadesuit \bowtie 1,\ \spadesuit \bowtie 2,\ \ldots,\ \spadesuit \bowtie \omega$

Optellen (herhaald 1 erbij)

Vermenigvuldigen (herhaald optellen)

Machtsverheffen (herhaald vermenigvuldigen)

Meer oneindige ordinaalgetallen

$$\omega,\quad \omega+1,\quad \omega+2,\quad \overset{1}{\dots},\quad \omega+\omega=\omega*2$$

$$\omega*2+1,\quad \omega*2+2,\quad \overset{1}{\dots},\quad \omega*2+\omega=\omega*3$$

$$\overset{1}{\dots},\quad \omega*4,\quad \overset{1}{\dots},\quad \omega*5,\quad \overset{2}{\dots},\quad \omega*\omega=\omega^2$$

$$\omega^2+1,\quad \overset{1}{\dots},\quad \omega^2+\omega,\quad \overset{2}{\dots},\quad \omega^2+\omega^2=\omega^2*2$$

$$\overset{2}{\dots},\quad \omega^2*3,\quad \overset{2}{\dots},\quad \omega^2*4,\quad \overset{3}{\dots},\quad \omega^2*\omega=\omega^3$$

$$\overset{4}{\dots},\quad \omega^4,\quad \overset{5}{\dots},\quad \omega^5,\quad \overset{\omega}{\dots},\quad \omega^\omega$$

Normaalvorm voor ordinaalgetallen $< \omega^\omega$

Normaalvorm van $\alpha < \omega^\omega$:

$$\alpha \;=\; \omega^k * c_k + \omega^{k-1} * c_{k-1} + \ldots + \omega^2 * c_2 + \omega * c_1 + c_0$$

waarbij k en alle c_i eindig zijn.

Vergelijk met decimale notatie:

$$N \;=\; 10^k * c_k + 10^{k-1} * c_{k-1} + \ldots + 10^2 * c_2 + 10 * c_1 + c_0$$

waarbij $0 \leq c_i < 10$, maar nu onbegrensde coëfficiënten.

Zelfde structuur als een lijst natuurlijke getallen: $[c_k, c_{k-1}, \ldots c_1, c_0]$.

Op naar epsilon nul

$$0, \quad 1, \quad \ldots, \quad \omega, \quad \ldots, \quad \omega * 2, \quad \ldots, \quad \omega^2, \quad \ldots, \quad \omega^\omega$$

$$\omega^\omega + 1, \quad \ldots, \quad \omega^\omega * 2 \quad \ldots, \quad \omega^\omega * \omega = \omega^{\omega+1}$$

$$\ldots, \quad \omega^{\omega*2}, \quad \ldots, \quad \omega^{\omega^2}, \quad \ldots, \quad \omega^{\omega^\omega}$$

$$\ldots, \quad \omega^{\omega^{\omega^\omega}}, \quad \ldots, \quad \underbrace{\omega^{\omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}}_{\omega\times} = \boxed{\epsilon_0}$$

$\boxed{\epsilon_0}$ is kleinste oplossing van

$$\alpha \;=\; \omega^\alpha$$

Normaalvorm voor ordinaalgetallen $< \epsilon_0$

Normaalvorm van $\alpha < \epsilon_0$:

$$\alpha \;=\; \omega^{\beta_k} * c_k + \omega^{\beta_{k-1}} * c_{k-1} + \ldots + \omega^{\beta_0} * c_0$$

waarbij k en alle c_i eindig zijn en $c_i \neq 0$, en

$$\alpha > \beta_k > \beta_{k-1} > \ldots > \beta_0$$

Vergelijk met super-G-notatie, maar nu onbegrensde coëfficiënten.

Zelfde structuur als een boom met positieve natuurlijke getallen.

Bewijs van Stelling van Goodstein

Schrijf N in super-G-notatie.

Vervang hierin iedere G door ω.

Het resultaat $\varphi(N, G)$ is een ordinaalgetal $< \epsilon_0$.

Bijvoorbeeld: $\varphi(266, 2) = \omega^{\omega^{\omega+1}} + \omega^{\omega+1} + \omega$

Claim: Als N', G' de opvolger in de Goodstein-rij bij N, G is, dan is

$$\varphi(N', G') < \varphi(N, G)$$

Ordinaalgetallen zijn welgeordend: elke dalende rij eindigt.

Slot

- ∞ is geen getal (algebra), wel limiet (topologie)

- Ordinaalgetallen (rangorde):

  $0,\ 1,\ 2,\ \omega,\ \omega+1,\ \omega*2,\ \omega^2,\ \omega^\omega,\ \omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = \epsilon_0,\ \ldots$

- Kardinaalgetallen (aantal):

  $0,\ 1,\ 2,\ \aleph_0,\ 2^{\aleph_0} = c,\ \aleph_1,\ \ldots$