

	Locatie 1	Locatie 2	Locatie 3	Locatie 4
Park 1	90	75	75	80
Park 2	35	85	55	65
Park 3	125	95	90	105
Park 4	45	110	95	115

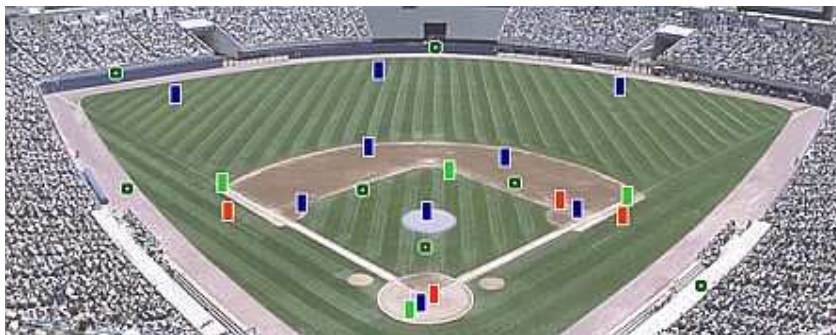
Wiskunde D

Keuzevak beslissen onderdeel: koppelen

versie 4 vrijdag 16 november 2007

Samenstelling
Jan Essers ism Kerngroep Wiskunde D Eindhoven
© Fontys

voorkennis: H2 beslissen in netwerk



Inhoud

3.1	Basisproblemen.....	3
3.2	Basistheorie	4
3.3	Verwerkingsopdrachten	12
3.4	Literatuur en verwijzingen	16
3.5	Overzicht begrippen.....	16

3.1 Basisproblemen

probleem 1

Een groot bouwbedrijf heeft vier machineparken waar hijskranen, bulldozers etc. opgeslagen worden. Momenteel is er in elk machinepark precies een hijskraan opgeslagen. Toevallig zijn er ook vier nieuwe bouwlocaties waar men een hijskraan nodig heeft. Het transport van een hijskraan is een kostbare zaak. In de onderstaande tabel zie je de afstand in kilometer tussen de vier bouwlocaties en de machineparken. Welke hijskraan moet je naar welke bouwlocatie transporteren als de totale transportafstand minimaal moet zijn?

	Locatie 1	Locatie 2	Locatie 3	Locatie 4
Park 1	90	75	75	90
Park 2	35	85	55	65
Park 3	135	95	90	105
Park 4	45	110	95	115

probleem 2

De coach van een baseballteam wil een optimale verdedigende opstelling bedenken voor zijn team dat bestaat uit 9 spelers. Daarvoor kent hij – op grond van de eerder geleverde prestaties op de training en eerdere wedstrijden - aan elke speler een rangnummer tussen 0 en 26 toe voor elk van de negen posities. Die 9 posities zie je aangegeven met de blauwe (donkere) blokjes op de voorpagina van dit hoofdstuk. In de tabel hieronder zie je zijn beoordelingen.

	Jan	Andre	Wouter	Ronald	Bert	Camiel	Max	Piet	Ernst
pitcher	20	15	10	10	17	23	25	5	15
catcher	10	10	12	15	9	7	8	7	8
first baseman	12	9	9	10	10	5	7	13	9
second baseman	13	14	10	15	15	5	8	20	10
third baseman	12	13	10	15	14	5	9	20	10
shortstop	15	14	15	16	15	5	10	20	10
outfielder 1	7	9	12	12	7	6	7	15	12
outfielder 2	5	6	8	8	5	4	5	10	7
outfielder 3	5	6	8	8	5	4	5	10	7

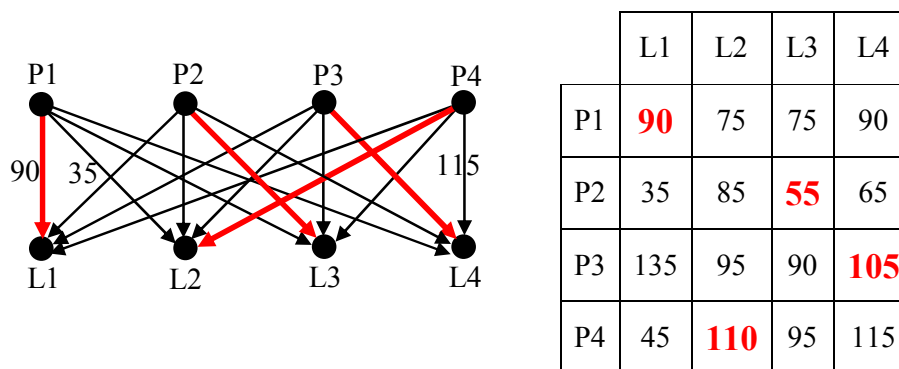
Hoe moet de coach zijn team samenstellen als hij de som van de rangnummers wil maximaliseren?

3.2 Basistheorie

In basisprobleem 1 moeten vier hijskranen naar vier verschillende locaties getransporteerd worden en dat kost tijd en dus geld. Je kunt je dan afvragen hoe je de hijskranen zo snel mogelijk op de locaties krijgt. Een maat daarvoor is het totaal aantal kilometers waarover je de vier hijskranen moet vervoeren. Dat getal wil je dus graag minimaliseren. Hoe moet je de hijskranen nu transporteren om dat te bereiken? Welke hijskraan moet naar welke bouwlocatie gebracht worden?

Als je de vier machineparken met P1 t/m P4 en de vier bouwlocaties met L1 t/m L4 aangeeft kun je dit probleem ook met een graaf weergeven. Er zijn dan 8 punten, de punten P1 t/m P4 (de P-punten) en L1 t/m L4 (de L-punten). Met lijnen tussen die twee groepen kun je nu de verbindingen aangeven. Er zijn dus in totaal $4^2 = 16$ lijnen. De afstanden tussen de machineparken en de bouwlocaties zijn dan de gewichten bij die lijnen. Hieronder zie je de graaf (met een aantal gewichten).

Dit type graaf noemt men een **bipartiete graaf** omdat de punten in twee groepen onder te verdelen zijn. Lijnen lopen van de punten van de ene groep naar de andere maar niet tussen de punten in een groep onderling.



Het probleem houdt nu in dat je precies vier lijnen moet kiezen die de vier P-punten verbinden met de vier L-punten waarvan de som van de gewichten minimaal is. Je zoekt dus een minimale koppeling tussen de beide groepen en daarom noemt men dit type probleem ook wel een **koppelingsprobleem** (Engels: assignment problem).

In de getekende graaf zijn vrij willekeurig vier lijnen gekozen. Het totaal aantal transportkilometers zijn bij deze keuze $90 + 55 + 105 + 110 = 350$ kilometer. Deze keuze is ook aangegeven in de tabel naast de graaf. In elke rij en in elke kolom is precies een getal geselecteerd. Dat gegeven is kenmerkend voor een koppeling.

De vraag is nu of het nog goedkoper kan? In principe is dat geen moeilijk probleem. Je kunt immers alle mogelijkheden nagaan. Voor P1 heb je vier keuzes. Bij een gemaakte keuze kun je dan P2 op nog precies drie manieren koppelen aan de overgebleven punten van de L-groep. Na koppeling van die 2 punten kun je dan nog op twee manieren P3 koppelen en het laatste punt staat dan vast. Op die manier zijn er dus $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ verschillende koppelingen mogelijk. Je kunt dus in principe de 24 verschillende koppelingen allemaal opschrijven en steeds het totaal aantal kilometers bepalen.

Hieronder zie je een vier andere koppelingen.

	L 1	L2	L3	L4
P1	90	75	75	90
P2	35	85	55	65
P3	135	95	90	105
P4	45	110	95	115

totaal $90 + 85 + 90 + 115 = 380$ km

	L 1	L2	L3	L4
P1	90	75	75	90
P2	35	85	55	65
P3	135	95	90	105
P4	45	110	95	115

totaal $90 + 95 + 55 + 115 = 355$ km

	L 1	L2	L3	L4
P1	90	75	75	90
P2	35	85	55	65
P3	135	95	90	105
P4	45	110	95	115

totaal $35 + 75 + 90 + 115 = 315$ km

	L 1	L2	L3	L4
P1	90	75	75	90
P2	35	85	55	65
P3	135	95	90	105
P4	45	110	95	115

totaal $45 + 75 + 90 + 65 = 275$ km

Bij de laatste koppeling zijn er in totaal 275 kilometer transport nodig. Een behoorlijke verbetering ten opzichte van de eerste koppeling waarbij er sprake was van 350 kilometer. Toch hoeft die 275 niet de optimale oplossing te zijn. Er zijn immers nog 19 andere koppelingen mogelijk en deze moeten ook berekend worden. Deze eenvoudige manier is daarom een vrij tijdsintensieve manier.

Als het aantal punten in de graaf toeneemt dan is deze methode al snel onmogelijk uit te voeren. Bij vijf bouwlocaties en vijf machineparken zijn er namelijk al $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ mogelijkheden. Teveel om handmatig na te lopen. Nog algemener zijn er bij n bouwlocaties en n machineparken $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ mogelijke koppelingen. Dat getal wordt meestal korter aangegeven met $n!$ en spreek je uit als **n -faculteit**. Er geldt dus $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$

In de onderstaande tabel zie je dat $n!$ fors toeneemt als n toeneemt.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n!$	1	2	6	24	120	720	5040	40320	362880	3628800

Bij toenemende n is een voor een alle koppelingen nalopen dus niet mogelijk. Daarom is er gezocht naar een veel snellere manier om dit probleem op te lossen. Die methode is in 1955 gevonden door Harold Kuhn en heet de **Hongaarse methode** (Engels: Hungarian algorithm). Overigens baseerde Kuhn zich daarbij op eerder werk van de Hongaarse wiskundigen Dénes König en Jenő Egerváry. De methode wordt toegepast op een vierkante tabel waarbij de gewichten niet-negatieve getallen zijn. De methode bestaat uit vier stappen. Elke stap levert een nieuwe tabel waarmee je verder gaat.

Deze vier stappen zullen we toepassen op het transportprobleem en dan zal blijken of 275 kilometer de minimale transportafstand is.

Stap 1 bepaal het **minimum** van de getallen **in elke rij** en trek dat minimum af van de getallen **in de rij**. Ga verder met stap 2.

Toelichting: op die manier maak je in elke rij een nul

	Locatie 1	Locatie 2	Locatie 3	Locatie 4	Aftrekken rij
Park 1	90	75	75	90	-75
Park 2	35	85	55	65	-35
Park 3	135	95	90	105	-90
Park 4	45	110	95	115	-45

Resultaat stap 1

	Locatie 1	Locatie 2	Locatie 3	Locatie 4
Park 1	15	0	0	15
Park 2	0	50	20	30
Park 3	45	5	0	15
Park 4	0	65	50	70

Stap 2 bepaal het **minimum** van de getallen **in elke kolom** en trek dat minimum af van de getallen **in de kolom**. Ga verder met stap 3.

Toelichting: op die manier maak je ook in elke kolom een nul, Het bepalen van de optimale koppeling komt nu neer op het zoeken van n (in dit voorbeeld 4) “geschikte nullen”.

	Locatie 1	Locatie 2	Locatie 3	Locatie 4
Park 1	15	0	0	15
Park 2	0	50	20	30
Park 3	45	5	0	15
Park 4	0	65	50	70
Aftrekken kolom	-0	-0	-0	-15

Resultaat stap 2

	Locatie 1	Locatie 2	Locatie 3	Locatie 4
Park 1	15	0	0	0
Park 2	0	50	20	15
Park 3	45	5	0	0
Park 4	0	65	50	55

Stap 3 Bedek met **zo weinig mogelijk** horizontale en verticale **lijnen alle nullen** in de tabel. Als je precies n (in dit voorbeeld 4) lijnen nodig hebt dan kun je een optimale oplossing in de tabel aflezen. Als je de nullen met minder dan n lijnen kunt bedekken dan is er nog geen optimale oplossing af te lezen. Ga dan verder met stap 4.

Toelichting

In de eerste en derde rij staan veel nullen dus die rijen moet je bedekken. Als je dan ook de eerste kolom bedekt, zijn alle nullen bedekt. Je hebt dus drie lijnen nodig. Dat betekent dat er nog geen optimale koppeling in tabel af te lezen is. Ga dus naar stap 4 (lijnen zijn ook als gearceerde cellen aangegeven).

	Locatie 1	Locatie 2	Locatie 3	Locatie 4
Park 1	15	0	0	0
Park 2	0	50	20	15
Park 3	45	5	0	0
Park 4	0	65	50	55

Stap 4 Bepaal het **kleinste getal** dat nog niet bedekt is door een lijn en trek dat getal af van **elk getal** dat nog **niet bedekt is** door een horizontale of verticale lijn en **tel het op** bij elk getal dat door **twee lijnen bedekt is**. Ga daarna terug naar stap 3.

Toelichting

Het kleinste niet bedekte getal is 15. Dat moet je van de 6 “niet-bedekte” getallen aftrekken. Je moet die 15 optellen bij de twee getallen die dubbel bedekt zijn.

	Locatie 1	Locatie 2	Locatie 3	Locatie 4
Park 1	15	0	0	0
Park 2	0	50	20	15
Park 3	45	5	0	0
Park 4	0	65	50	55

Toepassen stap 4

	Locatie 1	Locatie 2	Locatie 3	Locatie 4
Park 1	15 + 15	0	0	0
Park 2	0	50 - 15	20 - 15	15 - 15
Park 3	45 + 15	5	0	0
Park 4	0	65 - 15	50 - 15	55 - 15

Resultaat stap 4

	Locatie 1	Locatie 2	Locatie 3	Locatie 4
Park 1	30	0	0	0
Park 2	0	35	5	0
Park 3	60	5	0	0
Park 4	0	50	35	40

HERHALEN van stap 3**Toelichting**

Nu zijn er genoeg nullen en is een koppeling mogelijk. Je hebt vier lijnen nodig om alle nullen te bedekken (bijvoorbeeld vier horizontale lijnen). De optimale koppeling zie je hieronder. Dat is een kwestie van systematisch nullen kiezen. In de vierde rij staat precies een nul en dat betekent dat je P4 dus moet koppelen aan L1. In rij twee zie je dan dat je P2 aan L4 moet koppelen. Tenslotte moet je P3 aan L3 en P1 aan L2 koppelen. Op die manier is elke bouwlocatie gekoppeld aan een machinepark.

	Locatie 1	Locatie 2	Locatie 3	Locatie 4
Park 1	30	0	0	0
Park 2	0	35	5	0
Park 3	60	5	0	0
Park 4	0	50	35	40

De oplossing is gevonden. Met de oorspronkelijk tabel kun je de minimale vervoersafstand bepalen. Deze bedraagt $45 + 75 + 90 + 65 = 275$ km. De eerder (toevallig) gevonden oplossing was dus wel juist.

	Locatie 1	Locatie 2	Locatie 3	Locatie 4
Park 1	90	75	75	90
Park 2	35	85	55	65
Park 3	135	95	90	105
Park 4	45	110	95	115

De Hongaarse methode is een snelle methode. Dat komt ook tot uiting in het tweede voorbeeld.

In de onderstaande tabel staan de gemiddelde dagverkoopcijfers van vijf werknemers werkzaam in een groot warehouse voor vijf verschillende producten. Het probleem van de werkgever ligt voor de hand: hoe koppel je de werknemers aan de producten zodanig dat de totale dagopbrengst maximaal is?

	Product 1	Product 2	Product 3	Product 4	Product 5
werknemer 1	30	70	50	60	50
werknemer 2	45	80	65	60	70
werknemer 3	40	65	70	65	80
werknemer 4	60	70	75	55	75
werknemer 5	55	65	60	70	80

Bij dit koppelingsprobleem moet je vijf werknemers koppelen aan vijf producten en dat kan op $5! = 120$ manieren. Teveel mogelijkheden om een voor een na te lopen. De Hongaarse methode moet dus uitkomst bieden. Die methode werkt echter alleen voor het bepalen van een minimum. Met een truc kun je echter ervoor zorgen dat het zoeken

naar een maximum neerkomt op het zoeken van een minimum. Je kunt immers alle getallen in de tabel met -1 vermenigvuldigen. De vijf getallen uit het rijtje getallen 30, 70, 50, ..., 80 die maximale som geven, hebben dan dezelfde positie als de vijf negatieve getallen die minimale som leveren in het rijtje $-30, -70, \dots, -80$. De aangepaste tabel wordt dus (voor het gemak is werknemer afgekort met W en product met P)

	P1	P2	P3	P4	P5
W1	-30	-70	-50	-60	-50
W2	-45	-80	-65	-60	-70
W3	-40	-65	-70	-65	-80
W4	-60	-70	-75	-55	-75
W5	-55	-65	-60	-70	-80

Op deze manier staan er nu alleen negatieve getallen in de tabel. Het kleinste getal in de tabel is -80. Als je nu 80 bij elk getal optelt heb je weer te maken met niet-negatieve getallen. Die tabel ziet er als volgt uit:

	P1	P2	P3	P4	P5
W1	50	10	30	20	30
W2	35	0	15	20	10
W3	40	15	10	15	0
W4	20	10	5	25	5
W5	25	15	20	10	0

Op deze tabel kan nu de Hongaarse methode worden toegepast. Bedenk daarbij dat het minimum van de som van vijf getallen uit het rijtje $-30, -70, \dots, -80$ bij dezelfde cellen wordt gevonden als bij het rijtje getallen $-30 + 80, -70 + 80, \dots, -80 + 80 = 50, 10, \dots, 0$. De stappen in de Hongaarse methode verlopen nu als volgt:

Stap 1

	P1	P2	P3	P4	P5	Aftrekken rij
W1	50	10	30	20	30	-10
W2	35	0	15	20	10	-0
W3	40	15	10	15	0	-0
W4	20	10	5	25	5	-5
W5	25	15	20	10	0	-0

→

	P1	P2	P3	P4	P5
W1	40	0	20	10	20
W2	35	0	15	20	10
W3	40	15	10	15	0
W4	15	5	0	20	0
W5	25	15	20	10	0

Stap 2

	P1	P2	P3	P4	P5
W1	40	0	20	10	20
W2	35	0	15	20	10
W3	40	15	10	15	0
W4	15	5	0	20	0
W5	25	15	20	10	0
Aftrekken kolom	-15	-0	-0	-10	-0

→

	P1	P2	P3	P4	P5
W1	25	0	20	0	20
W2	20	0	15	10	10
W3	25	15	10	5	0
W4	0	5	0	10	0
W5	10	15	20	0	0

Stap 3

Je kunt de nullen met minder dan 5 lijnen bedekken. Het kan namelijk met 4 lijnen: een horizontale en drie verticale lijnen. Stap 4 is dus nodig.

	P1	P2	P3	P4	P5
W1	25	0	20	0	20
W2	20	0	15	10	10
W3	25	15	10	5	0
W4	0	5	0	10	0
W5	10	15	20	0	0

Stap 4

Het kleinste niet bedekte element is 10. Dat getal komt toevallig twee keer voor. Trek 10 af van de niet bedekte getallen en tel het op bij de dubbel bedekte getallen.

	P1	P2	P3	P4	P5
W1	25	0	20	0	20
W2	20	0	15	10	10
W3	25	15	10	5	0
W4	0	5	0	10	0
W5	10	15	20	0	0

	P1	P2	P3	P4	P5
W1	15	0	10	0	20
W2	10	0	5	10	10
W3	15	15	0	5	0
W4	0	15	0	20	10
W5	0	15	10	0	0

Stap 3 herhaling

En nu zijn er genoeg nullen en is een koppeling mogelijk. Er zijn zelfs twee oplossingen.

	P1	P2	P3	P4	P5
W1	15	0	10	0	20
W2	10	0	5	10	10
W3	15	15	0	5	0
W4	0	15	0	20	10
W5	0	15	10	0	0

	P1	P2	P3	P4	P5
W1	15	0	10	0	20
W2	10	0	5	10	10
W3	15	15	0	5	0
W4	0	15	0	20	10
W5	0	15	10	0	0

Deze oplossingen corresponderen met de oorspronkelijke tabellen als volgt.

	P1	P2	P3	P4	P5
W1	30	70	50	60	50
W2	45	80	65	60	70
W3	40	65	70	65	80
W4	60	70	75	55	75
W5	55	65	60	70	80

	P1	P2	P3	P4	P5
W1	30	70	50	60	50
W2	45	80	65	60	70
W3	40	65	70	65	80
W4	60	70	75	55	75
W5	55	65	60	70	80

In beide oplossingen is de totale gemiddelde dagopbrengst gelijk aan $60 + 80 + 70 + 60 + 80 = 60 + 80 + 80 + 75 + 55 = 350$ eenheden.

Op dezelfde manier kun je ook basisprobleem 2 oplossen want ook daar is sprake van een koppelingsprobleem waarbij naar een maximum gestreefd wordt. In dat voorbeeld van de negen baseballspelers zijn er maar liefst $9! = 362880$ mogelijke koppelingen. Toch zul je zien (opgave 3) dat de Hongaarse methode vrij snel een oplossing geeft.

De Hongaarse methode is een krachtig algoritme. Het bewijs dat het algoritme altijd de optimale oplossing geeft is niet eenvoudig. Je moet dan aantonen dat de optimale oplossing bij elke bewerking/stap behouden blijft. Dat is niet zo moeilijk in te zien bij de stappen 1 t/m 3 maar bij stap 4 is dat niet eenvoudig. Een bewijs laten we daarom hier achterwege.

De Hongaarse methode werkt ook bij koppelingsproblemen waarbij sprake is van een aantal verboden koppelingen en als er meer rijen dan kolommen of andersom zijn. Die varianten komen ter sprake in opgave 4 en 5.

3.3 Verwerkingsopdrachten

1 Alle transporten

Hieronder zie je een tabel waarin de afstanden tussen drie bouwlocaties en drie machineparken staan.

	Locatie 1	Locatie 2	Locatie 3
Machinepark 1	50	60	60
Machinepark 2	40	30	50
Machinepark 3	60	40	70

Net als in het voorbeeld moet er vanuit elk machinepark precies een hijskraan naar een bouwlocatie worden getransporteerd.

- Hoeveel verschillende koppelingen zijn er mogelijk
- Bepaal bij elke koppeling het totaal aantal kilometers die de drie hijskranen moeten afleggen. Welke koppelingen zijn het gunstigst wat betreft de afgelegde kilometers.
- Bepaal de optimale koppeling ook met de Hongaarse methode.

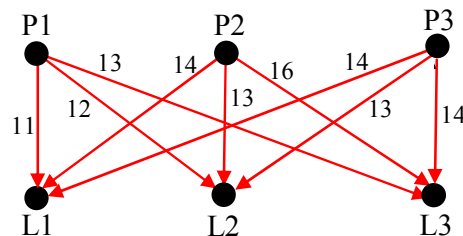
2 Estafette zwemmen

Bij de estafette 4 keer 50 meter wisselslag zwemmen zijn er vier onderdelen die door vier verschillende zwemmers moeten worden gezwommen. Hieronder zie je de persoonlijke records van elke zwemmer op elk onderdeel in seconden. Hoe kun je de ploeg het beste samenstellen?

	vlinderslag	schoolslag	rugslag	vrije slag
Zwemmer 1	25,7	31,1	28,5	23,8
Zwemmer 2	25,3	30,9	29,1	23,9
Zwemmer 3	26,0	30,9	28,7	24,2
Zwemmer 4	25,8	31,1	29,3	24,0

3 Koppeling in graaf

Hieronder zie je een bipartiete graaf. Naast de lijnen staan de gewichten. Bepaal met de Hongaarse methode een minimale koppeling tussen de beide groepen.



4 Baseballopstelling

De coach van een baseballteam wil een optimale opstelling bedenken voor zijn team dat bestaat uit 9 spelers. Daarvoor kent hij – op grond van de eerder geleverde prestaties op de training - aan elke speler een rangnummer tussen 0 en 26 toe voor elk van de negen posities. In de tabel hieronder zie je zijn beoordelingen.

	Jan	Andre	Wouter	Ronald	Bert	Camiel	Max	Piet	Ernst
pitcher	20	15	10	10	17	23	25	5	15
catcher	10	10	12	15	9	7	8	7	8
first baseman	12	9	9	10	10	5	7	13	9
Second baseman	13	14	10	15	15	5	8	20	10
third baseman	12	13	10	15	14	5	9	20	10
shortstop	15	14	15	16	15	5	10	20	10
outfielder 1	7	9	12	12	7	6	7	15	12
outfielder 2	5	6	8	8	5	4	5	10	7
outfielder 3	5	6	8	8	5	4	5	10	7

Hoe moet de coach zijn team samenstellen als hij de som van de rangnummers wil maximaliseren.

5 (verboden) Karweitjes

In een bedrijfshal kunnen vijf karweitjes op vijf verschillende machines worden uitgevoerd. In de tabel hieronder staan de kosten van het uitvoeren van een karwei op een bepaalde machine. Het oneindigheidsteken ∞ in het schema geeft aan dat dat karweitje niet op die machine kan worden uitgevoerd. Dat teken is gekozen omdat het uitvoeren van dat karwei bij wijze van spreken oneindig veel kost.

	Karwei 1	Karwei 2	Karwei 3	Karwei 4	Karwei 5
Machine 1	∞	8	6	12	1
Machine 2	15	12	7	∞	10
Machine 3	10	∞	5	14	∞
Machine 4	12	∞	12	16	15
Machine 5	18	17	14	∞	13

Hoe moet je de karweitjes aan de machines koppelen als de totale kosten minimaal moeten zijn?

Tip: gebruik gewoon de Hongaarse methode en bedenk daarbij dat oneindig min een vast getal oneindig blijft.

6 Munten veilen

Een handelaar in munten veilt vier waardevolle munten. Er zijn 4 klanten van hem die de munten zeer graag willen kopen. De handelaar houdt daarom een veiling en elke klant mag op elke munt een bod doen. De biedingen in Euro zie je in de onderstaande tabel

	Munt 1	Munt 2	Munt 3	Munt 4
Bieder 1	150	65	210	135
Bieder 2	175	75	230	155
Bieder 3	135	85	200	140
Bieder 4	140	70	190	130

- a) De handelaar wil zijn vaste klanten zo weinig mogelijk teleurstellen en verkoopt daarom niet meer dan een munt aan een bieder. Hoe moet hij de munten verkopen als hij zoveel mogelijk geld wil binnenhalen?

Voordat de handelaar gaat verkopen krijgt hij nog een mailtje van een klant die graag mee wil doen. Deze klant biedt vrij hoog voor munt 1 en 4. Dat zie je in de onderstaande uitgebreide tabel.

	Munt 1	Munt 2	Munt 3	Munt 4
Bieder 1	150	65	210	135
Bieder 2	175	75	230	155
Bieder 3	135	85	200	140
Bieder 4	140	70	190	130
Bieder 5	170	50	200	160

Omdat er nu meer bidders dan munten zijn zal de handelaar iemand moeten teleurstellen. Die bieder krijgt de niet bestaande vijfde munt waarop niemand geboden heeft. Hieronder zie je een tabel met die vijfde munt. Nu is de tabel weer vierkant en kun je de Hongaarse methode gebruiken.

	Munt 1	Munt 2	Munt 3	Munt 4	Munt 5
Bieder 1	150	65	210	135	0
Bieder 2	175	75	230	155	0
Bieder 3	135	85	200	140	0
Bieder 4	140	70	190	130	0
Bieder 5	170	50	200	160	0

- b) Hoe moet hij de handelaar de munten verkopen als hij zoveel mogelijk geld wil. Welke bieder krijgt geen munt?

7 Faculteiten

Faculteiten komen in veel onderwerpen van de wiskunde van pas. Op je rekenmachine zit een aparte knop waarmee je $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \dots (n-1) \cdot n$ kunt uittekenen (kan ook in een submenu bv Math zitten).

- Bereken $11!$, $20!$ en $30!$.
- Voor welke waarde helpt de GR je niet meer bij het benaderen van $n!$
- Schrijf eenvoudiger: $n!(n+1)$.
- Vereenvoudig $\frac{n!}{(n-1)!}$.
- $\frac{n!}{(n-2)!}$ kun je schrijven als een kwadratische vorm in n . welke?

Je kunt op $4 \cdot 3 = 12$ manieren 2 personen uit 4 personen kiezen waarbij de volgorde van de personen van belang is. Voor de eerste keuze heb je immers 4 mogelijkheden en voor de tweede keuze nog 3 mogelijkheden.

- Laat zien dat je dat ook kunt berekenen met de formule $\frac{4!}{(4-2)!}$
- Laat zien dat je op $\frac{n!}{(n-k)!}$ manieren k objecten uit n objecten kunt kiezen waarbij de volgorde van belang is.

3.4 Literatuur en verwijzingen

Sites over de Hongaarse methode

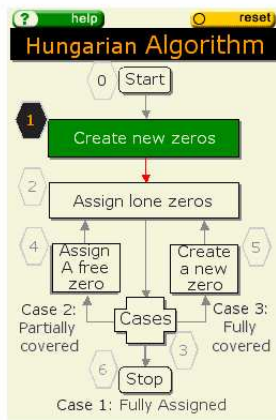
http://en.wikipedia.org/wiki/Hungarian_algorithm

http://www.ee.oulu.fi/~mpa/matreng/ematr1_2.htm

Applets waarin de Hongaarse methode stapsgewijs en deels interactief uitgelegd wordt

<http://www.ifors.ms.unimelb.edu.au/tutorial/hungarian/index.html>

Zeer fraai want je moet voortdurend de goede keuze maken. Start met klik op de vlag van Hongarije en kies dan next. Kies dan bijvoorbeeld het voorbeeld van Kuhn. Je kunt ook grotere tabellen kiezen en zelf getallen invoeren.



Step 1.1: For each row, subtract its smallest element from all its elements.

i / j	1	2	3	4	r(i)
1	6	6	1	5	
2	5	4	5	2	
3	3	3	4	5	
4	2	7	1	4	
Total					

Click on the smallest element of each row.

next

3.5 Overzicht begrippen

assignment problem, 4

bipartiete graaf, 4

Hongaarse methode, 5

Hungarian algorithm, 5

koppelingsprobleem, 4

n faculteit, 5