
De Tweede Kamer in Den Haag

Wiskunde D

Keuzevak beslissen onderdeel: macht

versie 4 maandag 3 december 2007

Samenstelling
Jan Essers ism Kerngroep Wiskunde D Eindhoven

Partij	**Stemmen**	**Zetels**	**Machtsindex van Banzhaf**
Christen Democratisch Appèl (CDA)	2.608.573	41	0,315
Partij van de Arbeid (PvdA)	2.085.077	33	0,210
Socialistische Partij (SP)	1.630.803	25	0,156
Volkspartij voor Vrijheid en Democratie (VVD)	1.443.312	22	0,113
Partij voor de Vrijheid (PVV)	579.490	9	0,065
GroenLinks (GL)	453.054	7	0,049
ChristenUnie (CU)	390.969	6	0,049
Democraten 66 (D66)	193.232	3	0,024
Partij voor de Dieren (PvdD)	179.988	2	0,016
Staatkundig Gereformeerde Partij (SGP)	153.266	2	0,016
totaal	**9.654.475**	**150**	**1**

Inhoud

4.1 Basisproblemen

probleem 1
De medezeggenschapsraad van een school bestaat uit tien personen: een lid van het management (de directeur), vier docenten, drie leerlingen en twee ouders. Op bepaalde terreinen (denk aan snoepautomaten met megapakken chips in school) heeft de raad beslissingsrecht en in de raad is afgesproken dat een voorstel wordt aangenomen wordt als meer dan vijf personen ervoor zijn. Wie heeft nu eigenlijk de meeste macht als de verschillende partijen zich als een blok gedragen dat wil zeggen dat ze gelijk stemmen. Hebben de docenten twee keer zoveel macht als de ouders? En wat is eigenlijk de macht van directeur in deze opzet?

probleem 2
In de onderstaande tabel zie je de uitslag van de Tweede Kamer verkiezingen in november 2006. Uit die verkiezingsuitslag is een kabinet CDA-PvdA-CU gevormd. Die drie partijen hebben samen 80 zetels en dat is meer dan de helft. Bij stemmingen in de Tweede Kamer kunnen ze dus wetsvoorstellen en moties doorslaggevend bepalen. Er zijn echter thema's waarover de regeringspartijen geen afspraken gemaakt hebben en waar partijen ongebonden mogen stemmen. Hoe is in dat geval de macht verdeeld?

Partij	**Stemmen**	**Zetels**
Christen Democratisch Appèl (CDA)	2.608.573	41
Partij van de Arbeid (PvdA)	2.085.077	33
Socialistische Partij (SP)	1.630.803	25
Volkspartij voor Vrijheid en Democratie (VVD)	1.443.312	22
Partij voor de Vrijheid (PVV)	579.490	9
GroenLinks (GL)	453.054	7
ChristenUnie (CU)	390.969	6
Democraten 66 (D66)	193.232	3
Partij voor de Dieren (PvdD)	179.988	2
Staatkundig Gereformeerde Partij (SGP)	153.266	2
totaal	**9.654.475**	**150**

4.2 Basistheorie

In de twee inleidende problemen is steeds sprake van een aantal groepen die mogen stemmen. In probleem 1 zijn het geledingen op een school, in probleem 2 de politieke partijen. Bij veel kwesties hebben personen in een geleding dezelfde belangen en stemmen ze hetzelfde. Ze stemmen allemaal voor of allemaal tegen. De personen gedragen zich dan als een blok. In de politiek gebeurt dat ook vaak. In sommige partijen eist men zelfs dat iedereen hetzelfde stemt. Als iemand zich daar niet bij neer kan leggen leidt dat wel eens tot het vertrek uit de partij en die persoon vormt dan een eenpersoonsfractie.

In de besliskunde noem je die partijen en geledingen die zich als blok gedragen **spelers**. Bij de medezeggenschapsraad zijn er vier spelers: de directeur, de docenten, de leerlingen en de ouders. De Tweede Kamer (in de periode november 2006 tot haar einde) bestaat uit 10 spelers, de 10 politieke partijen in het parlement. De term speler is een beetje vreemd want een speler kan dus uit meerdere personen bestaan.

Omdat een speler uit meerdere personen kan bestaan hebben spelers niet hetzelfde aantal stemmen. In de medezeggenschapsraad zijn er 10 stemmen en die zijn als volgt verdeeld

nummer	**speler**	**stemmen**
1	docenten	4
2	leerlingen	3
3	ouders	2
4	directeur	1
	totaal	**10**

Als er afgesproken is dat een voorstel aangenomen wordt bij meerderheid van stemmen dan zijn 6 stemmen voldoende om een voorstel aangenomen te krijgen. Dat getal heet het quotum. Het **quotum** is het minimaal aantal stemmen dat nodig is om een voorstel aangenomen te krijgen. Het aantal stemmen kun je zien als het gewicht van de speler.

Het kiessysteem van de medezeggenschapsraad wordt dus door vijf getallen vastgelegd. Het quotum en de vier gewichten van de spelers. In de besliskunde wordt daarvoor dan de verkorte notatie $[6;4,3,2,1]$ gebruikt. De getallen staan tussen rechte haken en worden gescheiden door een puntkomma en daarachter door komma's. Voor de puntkomma staat het quotum en achter de puntkomma de **gewichten** van de spelers.
Op dezelfde manier kun je de gegevens bij de Tweede Kamer weergeven. Het quotum is in die situatie 76, de helft van het totaal aantal stemmen plus 1. De situatie daar wordt dus aangegeven met $[76;41,33,25,22,9,7,6,3,2,2]$, de bij de spelers behorende partijen staan in de tabel op de vorige bladzijde.

Hoe zit het nu met de **macht** in de medezeggenschapsraad? Welke speler kan “het meest” bepalen wat er besloten wordt? In die situatie geldt $[6;4,3,2,1]$.

Geen enkele speler heeft 6 of meer stemmen en haalt op eigen kracht het quotum. Dat wil zeggen dat geen enkele speler **dictator** is. Als dat het geval is dan heeft zo’n speler de **absolute macht**. In de besliskunde ken je aan een dictator dan het getal 1 toe en aan alle andere spelers het getal 0, die spelers heten **dummy**. Die spelers kunnen namelijk nooit een voorstel aangenomen krijgen zonder dat die dictator instemt. Die getallen die je toekent aan spelers heet een **machtsindex**. Het is een getal groter of gelijk aan nul en kleiner of gelijk aan 1.
Aan dit voorbeeld zie je ook dat de verhouding van de gewichten niet zoveel zegt. De machtsindices in een democratie met twee partijen waarbij de verkiezingen geleid hebben tot $[150;76,74]$ zijn 1 en 0. De partij met 76 zetels heeft absolute macht gekregen.
Je mag dus ook niet zonder meer zeggen dat in de medezeggenschapsraad de docenten vier keer zoveel macht hebben dan de directeur omdat het gewicht vier zo groot is.

Wel is duidelijk dat de vierde speler, de directeur de minste macht moet hebben. Met een stem kan hij niet veel invloed uitoefenen. Sterker nog. Ook samen met precies een andere speler haalt hij geen meerderheid want $4+1<6$, $3+1<6$ en $2+1<6$. De ouders (speler 3) hebben meer macht dan de directeur, zij kunnen namelijk op meer manieren een voorstel aangenomen krijgen. Dat lukt bijvoorbeeld samen met de docenten. De machtsindex van de ouders moet dus groter zijn dan de machtsindex van de directeur.

In de volgende tabel zie je dat nogmaals. In die tabel staan alle **winnende coalities** bij $[6;4,3,2,1]$. Een winnende coalitie is een verbond van 2 of meer spelers die samen het quotum halen. In de tabel zie je dat er 7 winnende coalities zijn en dat de ouders vijf keer deel uitmaken van een winnende coalitie en de directeur slechts vier keer. Ook de leerlingen staan in vijf winnende coalities en de docenten staan het vaakst bij de winnende coalities namelijk 6 keer.

Winnende coalitie	**Aantal stemmen**
1 , 2	7
1 , 3	6
1 , 2 , 3	9
1 , 2 , 4	8
1 , 3 , 4	7
2 , 3 , 4	6
1 , 2 , 3 , 4	10

Het aantal keren dat elke speler in deze tabel staat zegt echter niet alles over de macht van de speler. In sommige winnende coalities is er een speler die gemakkelijk gemist kan worden. Of hij wel of niet voorstemt is eigenlijk niet van belang. In feite heeft hij geen macht door in die coalitie te zitten. In de coalitie 1, 2 en 3 bijvoorbeeld kan 3 (de ouders) net zo goed achterwege blijven. Zo’n speler is in de coalitie niet kritiek. De twee andere spelers kunnen echter niet gemist worden voor het behalen van het quotum. Zij zijn **kritieke spelers** in de coalitie.

In de volgende tabel staan nogmaals de winnende coalities maar dit keer zijn de niet kritieke spelers doorgestreept.

Winnende coalitie
1 , 2
1 , 3
1 , ~~2~~ , ~~3~~
1 , 2 , ~~4~~
1 , 3 , ~~4~~
2 , 3 , 4
~~1~~ , ~~2~~ , ~~3~~ , ~~4~~

In het schema is 8 keer een speler doorgestreept en is 12 een speler niet doorgestreept. De directeur is in dat schema nog maar een keer te zien. De ouders en de leerlingen zijn net zo vaak te zien en dus moeten zij net zoveel macht toebedeeld krijgen. Je kunt nu de machtsindex van elke speler definiëren als de verhouding van het aantal keer dat een speler kritiek is tot het totaal aantal keer dat alle spelers samen kritiek zijn. Op die manier is de som van de indices namelijk gelijk aan 1, een mooie eigenschap die snel de onderlinge machtsverhoudingen laat zien. De resultaten zijn:

speler	Machtsindex Banzhaf
1 docenten	$5/12 \approx 0,417$
2 leerlingen	$3/12 = 1/4 = 0,25$
3 ouders	$3/12 = 1/4 = 0,25$
4 directeur	$1/12 \approx 0,083$


John Banzhaf

Deze methode is bedacht door de jurist John F. Banzhaf III toen hij het stemgedrag analyseerde in diverse systemen, onder andere het Amerikaanse verkiezingssysteem.

De machtindex heet de **machtindex van Banzhaf.**
Uit dit schema kun je nu concluderen dat de docenten de meeste macht hebben en de directeur de minste. De docenten hebben om precies te zijn vijf keer zoveel macht als de directeur. De ouders en de leerlingen hebben gelijke macht: drie keer zoveel als de directeur.

Bij een kleine verandering van de getallen of bij een geheime coalitie kunnen de machtindices behoorlijk veranderen. Stel dat de directeur altijd hetzelfde stemt als de ouders. In feite zijn er dan nog maar drie spelers en het spel is dan $[6;4,3,3]$. De drie spelers krijgen in die situatie gelijke macht!!!

Winnende coalitie	speler	Machtsindex
1 , 2	1 docenten	$2/6 = 1/3$
1 , 3	2 leerlingen	$2/6 = 1/3$
2 , 3	3 ouders en directeur	$2/6 = 1/3$
~~1~~ , ~~2~~ , ~~3~~		

De methode van Banzhaf kan ook worden toegepast om de machtsverdeling in de Tweede Kamer te bepalen (na de verkiezingen van 2006) waarbij je ervan uitgaat dat partijen onafhankelijk van elkaar opereren. Uiteraard gebeurt dat meestal niet want de regeringspartijen hebben onderlinge afspraken gemaakt.

Probleem daarbij is het bepalen van alle winnende coalities. Bij 10 spelers zijn er in totaal 1024 mogelijke stemmingen. Elke partij kan namelijk voor of tegen stemmen en op die manier krijg je dus $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot ..... \cdot 2 = 2^{10} = 1024$ verschillende mogelijkheden. De meeste van die coalities zijn niet winnend. In totaal blijken er 505 winnende coalities te zijn. Teveel om in een tabel op te schrijven. In de onderstaande tabel zie je alleen de winnende coalities met drie spelers waarin elke speler kritiek is.

Winnende coalitie	**Totaal aantal stemmen**
CDA , PvdA, SP	99
CDA , PvdA, VVD	96
CDA , PvdA, PVV	83
CDA , PvdA, GL	81
CDA , PvdA, CU	80
CDA , PvdA, D66	77
CDA , PvdA, PvdD	76
CDA , PvdA, SGP	76
CDA , SP, VVD	88
PvdA, SP, VVD	80

Er zijn ook nog vele coalities van vier partijen of meer die samen meer dan 75 stemmen halen en waarin elke partij kritiek is. Een voorbeeld is bijvoorbeeld CDA, VVD, PVV en CU. Gelukkig is voor het bepalen van al die coalities en voor het berekenen van de index van Banzhaf geschikte software ontwikkeld waarin je alleen de gewichten en het quotum hoeft in te voeren. In de volgende tabel zie je de resultaten. Uiteraard heeft de grootste partij – het CDA – de grootste machtsindex. De CU heeft niet zoveel macht volgens de tabel maar als regeringspartij is zij wel van belang als er voor belangrijke wetten moet worden gestemd.

Partij	**Stemmen**	**Zetels**	**Machtsindex van Banzhaf**
Christen Democratisch Appèl (CDA)	2.608.573	41	0,315
Partij van de Arbeid (PvdA)	2.085.077	33	0,210
Socialistische Partij (SP)	1.630.803	25	0,156
Volkspartij voor Vrijheid en Democratie (VVD)	1.443.312	22	0,113
Partij voor de Vrijheid (PVV)	579.490	9	0,065
GroenLinks (GL)	453.054	7	0,049
ChristenUnie (CU)	390.969	6	0,049
Democraten 66 (D66)	193.232	3	0,024
Partij voor de Dieren (PvdD)	179.988	2	0,016
Staatkundig Gereformeerde Partij (SGP)	153.266	2	0,016
totaal	**9.654.475**	**150**	**1**

De machtsindex van Banzhaf is door John Banzhaf in 1965 bedacht. Later zijn er meer machtsindices bedacht en een van de bekendste en meest gebruikte naast de index van Banzhaf is de machtsindex van Lloyd Shapley en Martin Shubik.

De machtsindex bedacht door die twee wiskundigen heet dan ook de machtsindex van Shapley-Shubik.

Lloyd Shapley

Shapley en Shubik gaan uit van alle mogelijke volgordes van stemmen waarin alle spelers om de beurt voorstemmen. Zo'n volgorde wordt een **sequential coalition** genoemd. In het voorbeeld van de medezeggenschapsraad - $[6;4,3,2,1]$ - zijn het er 24, je kunt immers vier spelers op $4!=1\cdot2\cdot3\cdot4=24$ in een rij zetten. In de onderstaande tabel zie 24 rijen.
In de kolom ernaast zie je de groei van het aantal stemmen in de coalitie als een speler in de coalitie deelneemt. Bij elke rij wordt ergens het quotum van 6 overschreden. Dat getal is omkaderd. De speler waarbij dat gebeurt heet de **spil speler** of **as speler** (Engels: pivotal player).

sequential coalition	**Toename aantal stemmen**
1 , $\boxed{2}$, 3 , 4	$4 \to \boxed{7} \to 9 \to 10$
1 , $\boxed{2}$, 4 , 3	$4 \to \boxed{7} \to 8 \to 10$
1 , $\boxed{3}$, 2 , 4	$4 \to \boxed{6} \to 9 \to 10$
1 , $\boxed{3}$, 4 , 2	$4 \to \boxed{6} \to 7 \to 10$
1 , 4 , $\boxed{2}$, 3	$4 \to 5 \to \boxed{8} \to 10$
1 , 4 , $\boxed{3}$, 2	$4 \to 5 \to \boxed{7} \to 10$
2 , $\boxed{1}$, 3 , 4	$3 \to \boxed{7} \to 9 \to 10$
2 , $\boxed{1}$, 4 , 3	$3 \to \boxed{7} \to 8 \to 10$
2 , 3 , $\boxed{1}$, 4	$3 \to 5 \to \boxed{9} \to 10$
2 , 3 , $\boxed{4}$, 1	$3 \to 5 \to \boxed{6} \to 10$
2 , 4 , $\boxed{1}$, 3	$3 \to 4 \to \boxed{8} \to 10$
2 , 4 , $\boxed{3}$, 1	$3 \to 4 \to \boxed{6} \to 10$
3 , $\boxed{1}$, 2 , 4	$2 \to \boxed{6} \to 9 \to 10$
3 , $\boxed{1}$, 4 , 2	$2 \to \boxed{6} \to 7 \to 10$
3 , 2 , $\boxed{1}$, 4	$2 \to 5 \to \boxed{9} \to 10$
3 , 2 , $\boxed{4}$, 1	$2 \to 5 \to \boxed{6} \to 10$
3 , 4 , $\boxed{1}$, 2	$2 \to 3 \to \boxed{7} \to 10$
3 , 4 , $\boxed{2}$, 1	$2 \to 3 \to \boxed{6} \to 10$
4 , 1 , $\boxed{2}$, 3	$1 \to 5 \to \boxed{8} \to 10$
4 , 1 , $\boxed{3}$, 2	$1 \to 5 \to \boxed{7} \to 10$
4 , 2 , $\boxed{1}$, 3	$1 \to 4 \to \boxed{8} \to 10$
4 , 2 , $\boxed{3}$, 1	$1 \to 4 \to \boxed{6} \to 10$
4 , 3 , $\boxed{1}$, 2	$1 \to 3 \to \boxed{7} \to 10$
4 , 3 , $\boxed{2}$, 1	$1 \to 3 \to \boxed{6} \to 10$

Het aantal keren dat een speler spilspeler is, geeft aan hoe doorslaggevend zijn bijdrage is. De verhouding van het aantal keer spilspeler tot het totaal aantal sequential coalitions is nu de machtsindex van Shapley-Kubik.

Dat leidt tot de volgende resultaten:

speler	**Machtsindex Shapley-Shubik**
1 docenten	$10/24 = 5/12 \approx 0,417$
2 leerlingen	$6/24 = 1/4 = 0,25$
3 ouders	$6/24 = 1/4 = 0,25$
4 directeur	$2/24 = 1/12 \approx 0,083$

De indices zijn in dit voorbeeld precies hetzelfde als de indices van Banzhaf**.** Dat is in het algemeen niet het geval. Hieronder zie je een rekenvoorbeeld waarin de indices verschillen. De uitgangssituatie is $[8;7,5,2]$.

speler	**Machtsindex Banzhaf**	**Machtsindex Shapley-Shubik**
1	0,60	$4/6 = 2/3 \approx 0,67$
2	0,20	$1/6 \approx 0,17$
3	0,20	$1/6 \approx 0,17$

In beide situaties is de machtsindex van speler 1 de grootste en zijn de machtsindices van speler 2 en 3 gelijk. Er zit alleen een klein verschil tussen de getallen.

Martin Shubik

Net als bij de machtsindex van Banzhaf is het berekenen van de index van Shapley-Shubik “met de hand” niet mogelijk als het aantal spelers groot is. Bij 10 spelers zijn er $10! = 3628800$ verschillende sequential coalitions. Voor het bepalen van die indices zijn door wiskundigen slimme algoritmes bedacht die computerprogrammeurs in software omgezet hebben. In de links bij dit hoofdstuk vind je adressen waar je online de indices kunt laten berekenen.

Hieronder zie je de resultaten voor de Tweede Kamer.

Partij	Stemmen	Zetels	Machtsindex van Banzhaf	Machtsindex Shapley-Shubik
Christen Democratisch Appèl (CDA)	2.608.573	41	0,315	0,315
Partij van de Arbeid (PvdA)	2.085.077	33	0,210	0,223
Socialistische Partij (SP)	1.630.803	25	0,156	0,150
Volkspartij voor Vrijheid en Democratie (VVD)	1.443.312	22	0,113	0,110
Partij voor de Vrijheid (PVV)	579.490	9	0,065	0,062
GroenLinks (GL)	453.054	7	0,049	0,046
ChristenUnie (CU)	390.969	6	0,038	0,037
Democraten 66 (D66)	193.232	3	0,024	0,024
Partij voor de Dieren (PvdD)	179.988	2	0,016	0,017
Staatkundig Gereformeerde Partij (SGP)	153.266	2	0,016	0,017
totaal	**9.654.475**	**150**	**1**	**1**

De index van Shapley-Shubik wijkt bij elke partij slechts een beetje af van de index van Banzhaf. De volgorde van afnemende indices is gelijk. Beide methoden geven aan dat het CDA de meeste macht heeft als de partijen tenminste vooraf geen afspraken wat betreft stemgedrag. De machtsindices van de regeringspartijen samen is meer dan helft dus er kan geregeerd worden. Overigens zie je hieronder de machtsindices voor de situatie dat de drie regeringspartijen als een speler gezien worden. Geen verrassing dat dan de eigenschappen van een dictator te zien zijn.

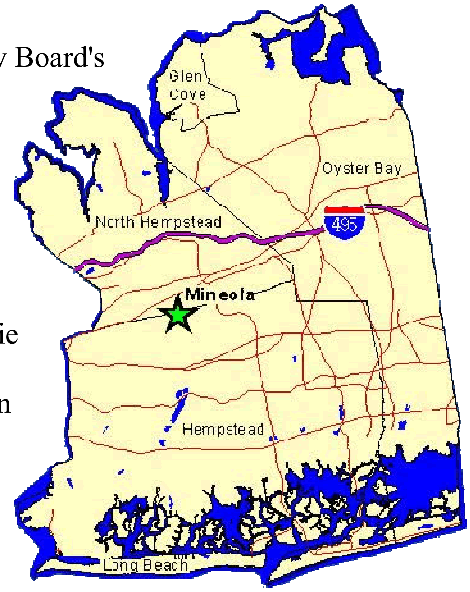
Partij	Stemmen	Zetels	Machtsindex van Banzhaf	Machtsindex Shapley-Shubik
Regering feb 2007 (CDA – PvdA - CU)	5.084.619	80	1	1
Socialistische Partij (SP)	1.630.803	25	0	0
Volkspartij voor Vrijheid en Democratie (VVD)	1.443.312	22	0	0
Partij voor de Vrijheid (PVV)	579.490	9	0	0
GroenLinks (GL)	453.054	7	0	0
Democraten 66 (D66)	193.232	3	0	0
Partij voor de Dieren (PvdD)	179.988	2	0	0
Staatkundig Gereformeerde Partij (SGP)	153.266	2	0	0
totaal	**9.654.475**	**150**	**1**	**1**

Gelukkig kan in Nederland zo’n regering nog niet alles naar zijn hand zetten. Voor wijzigingen in de grondwet is een 2/3 meerderheid nodig dus dan is het quotum gelijk aan 90. En verder is er ook nog de Eerste Kamer waar ook een meerderheid behaald moet worden.

4.3 Verwerkingsopdrachten

Opdrachten over koppelingsproblemen.

1 Oneerlijk?



Banzhaf heeft zijn index uitgedacht toen hij het Nassau County Board's kiessysteem bestudeerde. Nassau County is een district in de staat New York van de USA met meer dan 1 miljoen inwoners. Het kiessysteem was volgens hem oneerlijk en om dat aan te tonen heeft hij zijn index bedacht. In dat kiessysteem van Nassau waren er toen zes steden en gebieden met stemrecht. Het waren:
A Hempstead #1, B Hempstead #2,C North Hempstead,
D Oyster Bay, E Glen Cove en F Long Beach. In die laatste drie steden woonden toen 16% van het totaal aantal inwoners van Nassau. Het quotum en de gewichten in het stemsysteem waren destijds $[16;9,9,7,3,1,1]$.

Alle winnende coalities bij deze gegevens zijn:

AB AC BC ABC ABD ABE ABF ACD ACE ACF
BCD BCE BCF ABCD ABCE ABCF ABDE ABDF ABEF ACDE ACDF ACEF
BCDE BCDF BCEF ABCDE ABCDF ABCEF ABDEF ACDEF BCDEF ABCDEF

a) Bepaal in elke winnende coalitie de kritieke spelers.
b) Bereken de machtsindices van alle spelers.
c) Wat vond Banzhaf oneerlijk aan het systeem van Nassau.

2 Banzhaf versus Shapley-Shubik

Hieronder staan drie kiesstelsels. Steeds zijn er vier spelers.

- $[8;8,5,1,1]$
- $[11;8,6,4,2]$
- $[11;7,7,5,1]$

a) Bereken in elk stelsel van elke speler de machtsindex van Banzhaf.
b) Bereken in elk stelsel van elke speler de machtsindex van Shapley-Shubik.
c) Vergelijk de resultaten bij elk systeem. Is de volgorde van toenemende macht steeds gelijk?

3 Tegenspraak?

Met machtsindices kun je de macht van spelers bepalen. Toch kunnen de uitkomsten vreemd overkomen zoals je aan de volgende opgaven kunt zien.

a) De spelers 1 en 2 hebben bijna 100 keer zoveel stemmen als speler 1 in de situatie $[100;99,99,1]$. Is de machtsindex van speler 1 en 2 ook ongeveer 100 zo groot? Bereken daarvoor de machtindices van Banzaf.
b) Stel dat speler 3 in plaats van 1 nu 98 stemmen heeft: $[\text{quotum};99,99,98]$. Bereken het nieuwe minimale quotum. Verandert hierdoor de machtsverdeling tussen de drie spelers. Zo ja, hoe?
c) Het quotum hoeft niet de helft plus 1 te zijn. Stel dat een voorstel wordt aangenomen bij 198 stemmen. Hoe is nu de verdeling van de macht als de drie spelers het aantal stemmen gegeven in b) hebben. Dus $[198;99,99,98]$.
d) Vergelijk de situatie van onderdeel a) met onderdeel c). Is dat niet vreemd?

4 Een speler met veel macht

In deze opgave bekijken we een spel waarin alle spelers een stem hebben op een persoon na. Die speler – speler 1 - heeft 2 stemmen.

a) Bereken de machtsindices van Shapley-Shubik als er drie spelers zijn. Dus voor $[3;2,1,1]$.
b) Bereken de machtsindices van Shapley-Shubik als er vier spelers zijn.

De berekeningen in a) en b) zijn snel gemaakt met behulp van een tabel of een programma. Als het aantal spelers variabel is dan moet je slim tellen.

c) Bereken het quotum q als er n spelers zijn, dus 1 speler met 2 stemmen en $n-1$ spelers met 1 stem.
d) Bereken de machtsindices van Shapley-Shubik voor die situatie $\left[q;2,\underbrace{1,1,....,1}_{n-1}\right]$

5 Het Europese parlement

In de basistheorie is de machtsverdeling in de Tweede Kamer aan de orde gekomen. Een ander en nog groter democratisch orgaan is de Europese Unie. De EU bestond in juni 2006 uit 27 landen. Het aantal zetels in het parlement wordt bepaald door de omvang van de bevolking van het land. In bijlage 1 zie je de landen van de EU en het aantal zetels.


Europees parlement in Straatsburg

a) Bepaal de machtsverdeling volgens Banzhaf in de EU als je ervan uit gaat dat landen zich als blokken gedragen die hetzelfde stemmen. Op welke plaats staat Nederland?
b) Idem maar nu volgens het systeem van Shapley-Shubik.
c) Bij toename van het aantal landen wordt de macht van de kleine landen erg klein. Nederland zou meer macht krijgen als het in een blok samenwerkt met een paar lotgenoten. Bijvoorbeeld Belgie en Luxemburg (de nog altijd bestaande BeNeLux). Bereken het effect van die samenwerking

6 Telproblemen

In dit hoofdstuk maar ook in de andere hoofdstukken heb je verschillende formules gezien die bij telproblemen tevoorschijn komen.

- Hoeveel snijpunten kunnen *n* lijnen in het platte vlak maximaal hebben als die lijnen onderling niet samenvallen (H1)? Hoeveel lijnen bezit een volledige graaf met *n* punten (H2)?
  antwoord: $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.
- Op hoeveel manieren kun je *n* spelers koppelen aan *n* karweitjes (H3)?
  Op hoeveel manieren kun je *n* spelers op een rij zetten (H4)?
  antwoord: $n!$.
- Op hoeveel manieren kun je uit *n* spelers een groep kiezen (H4)?
  antwoord: 2^n.

Probeer met systematisch tellen en redeneren nu de volgende aantallen te berekenen

a) Hoeveel gehele getallen met precies zes verschillende cijfers bestaan er?
b) Op hoeveel manieren kunnen vijf mensen in een auto gaan zitten als twee personen een rijbewijs bezitten en achterin 3 personen kunnen zitten
c) Op hoeveel manieren kun je 8 torens op een schaakbord zetten als die torens elkaar onderling niet mogen bedreigen.
d) Hoeveel verschillende wedstrijdschema's kun je maken voor de eerste ronde van een knock-out voetbaltoernooi waarin 8 teams deelnemen. Die eerste ronde bestaat dus uit vier wedstrijden.

7 Andere machtsindex

Opmerking. De onderstaande examenopgave gaat over macht maar er wordt een andere index gebruikt. In het laatste toegevoegde onderdeel wordt gevraagd om ook de Shapley-Shubik-index te berekenen.

Macht (uit vwo-examen wiskunde A 22 juni 2005)

Sinds 1 mei 2004 bestaat de Europese Unie uit 25 landen. In de Raad van Ministers heeft elk land één zetel. In deze raad worden veel beslissingen genomen. Daarbij heeft niet elk land evenveel stemmen. Zo heeft Frankrijk 29 stemmen, Nederland 13 stemmen en Denemarken 7 stemmen.

Op deze wijze beschikken de 25 landen samen over 321 stemmen. Een land stemt óf voor óf tegen en kan zich dus niet van stemming onthouden of met een deel van zijn stemmen vóór en een ander deel tegen stemmen.

Vaak worden beslissingen genomen bij meerderheid van stemmen. Dat betekent dat een voorstel alleen wordt aangenomen als meer dan de helft van de stemmen voor dat voorstel is. Dan kan het gebeuren dat de stemmen van Nederland de doorslag geven bij het wel of niet aannemen van een voorstel. Dat is bijvoorbeeld het geval wanneer van de overige landen 152 stemmen voor zijn en 156 stemmen tegen.

a) Bereken bij welke aantallen voorstemmen van de overige landen de stemmen van Nederland de doorslag geven om een meerderheid voor een voorstel te krijgen.

Bij een stemming kan dus één van de partijen soms de doorslag geven. Hoeveel invloed een partij bij de stemming heeft, geven we aan met de *machtsindex (mi)*. Aan de hand van een voorbeeld laten we zien hoe je die kunt uitrekenen. We gaan uit van drie partijen A, B en C. Partij A heeft 6 stemmen, partij B heeft 4 stemmen en partij C heeft 3 stemmen. Zij beslissen over een voorstel bij meerderheid van stemmen. Eén van de mogelijkheden is de volgende: A stemt voor, B stemt voor en C stemt tegen.
Deze mogelijkheid noteren we met (V,V,T).

We gaan nu de machtsindex van één van deze partijen, partij B, berekenen. Daarvoor kijken we alleen naar de mogelijkheden waarbij deze partij voor stemt. Dat levert de volgende mogelijkheden op:

mogelijkheid I	(V,V,V)
mogelijkheid II	(V,V,T)
mogelijkheid III	(T,V,V)
mogelijkheid IV	(T,V,T)

Omdat de partijen samen 13 stemmen hebben, zijn er minstens 7 stemmen nodig voor een meerderheid. Bij de mogelijkheden I, II en III is er een meerderheid voor het voorstel. Bij de mogelijkheden II en III zijn de 4 voorstemmen van B onmisbaar om een meerderheid te realiseren. Bij mogelijkheid I zou die meerderheid ook behaald zijn als B niet voor zou stemmen. Bij mogelijkheid IV is er geen meerderheid. Omdat de stemmen van B bij 2 van de 4 mogelijkheden doorslaggevend zijn, zeggen we:de machtsindex van B is $mi_B = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

We gebruiken dus de volgende definitie van de machtsindex *(mi)* van een partij:

$$mi = \frac{\text{aantal mogelijkheden waarbij de voorstemmen van die partij doorslaggevend mi zijn voor de meerderheid}}{\text{totaal aantal mogelijkheden waarbij die partij voorstemt}}$$

Wanneer er sprake is van vier partijen, zijn er meer mogelijkheden. We nemen de volgende situatie: partij A heeft 7 stemmen, partij B heeft 4 stemmen, partij C heeft 4 stemmen en partij D heeft 2 stemmen. Ook nu beslissen de partijen bij meerderheid van stemmen.

b) Bereken de machtsindex van A in deze nieuwe situatie.

De verdeling van de stemmen kan tot vreemde situaties leiden wanneer er één partij is met weinig stemmen. Er zijn 3 partijen. Partij *A* heeft 6 stemmen, partij *B* 4 stemmen en partij *C* slechts 1 stem. De partijen *B* en *C* stellen nu een nieuwe verdeling voor waarbij *A* en *B* elk 5 stemmen hebben en *C* nog steeds 1 stem. Het aantal stemmen van *C* is dan weliswaar niet groter geworden, maar de machtsverhoudingen zijn wel veranderd.

c) Toon dit aan door in beide situaties de machtsindex van elk van de drie partijen te berekenen.

d) **Extra opgave (dus geen onderdeel examenopgave)**
Bereken ook de Shapley-Shubik machtsindices van A, B en C voor de twee situaties
1) partij *A* 6 stemmen heeft, partij *B* 4 stemmen en partij *C* 1 stem.
2) partij *A* 5 stemmen heeft, partij *B* 5 stemmen en partij *C* 1 stem.
Vergelijk de indices net als in onderdeel c. Is ook nu die verschuiving van macht aanwezig.

We nemen nu een situatie met vijf partijen *A, B*, *C*, *D* en *E.* Partij *A* heeft 3 stemmen en de overige partijen hebben elk 1 stem.

e) Onderzoek of de machtsindex van *A* meer dan drie maal zo groot is als de machtsindex van *B*

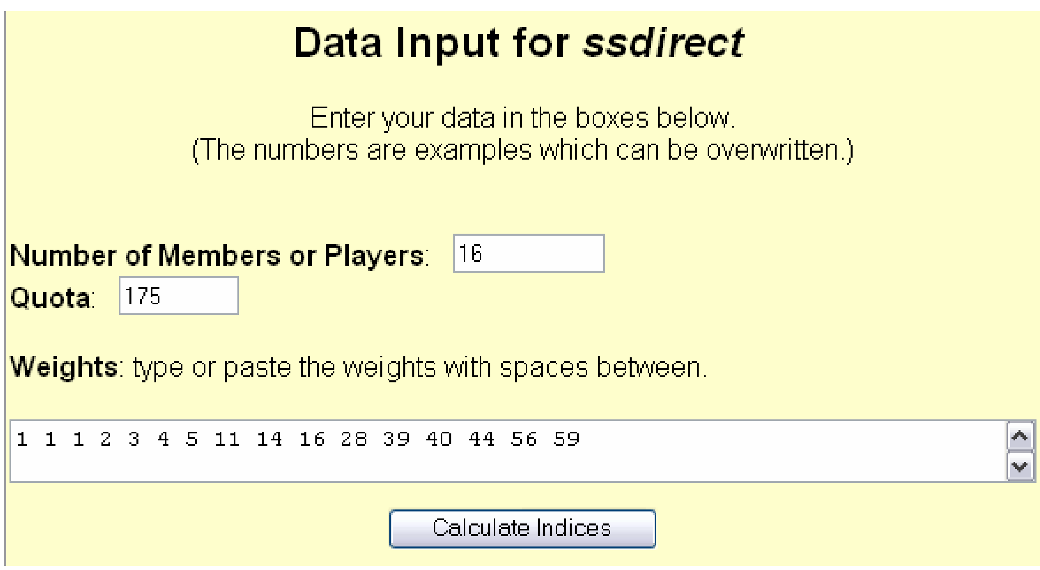
4.4 Literatuur en verwijzingen

Sites rondom machtsindices
http://www.ctl.ua.edu/math103/POWER/introduc.htm (kies back)
http://en.wikipedia.org/wiki/Banzhaf_power_index
http://www.cs.unc.edu/~livingst/Banzhaf/

Personal sites van John Banzhaf, Lloyd S. Shapley en Martin Shubik
http://banzhaf.net/
http://econweb.sscnet.ucla.edu/shapley/
http://www.som.yale.edu/Faculty/mss1/

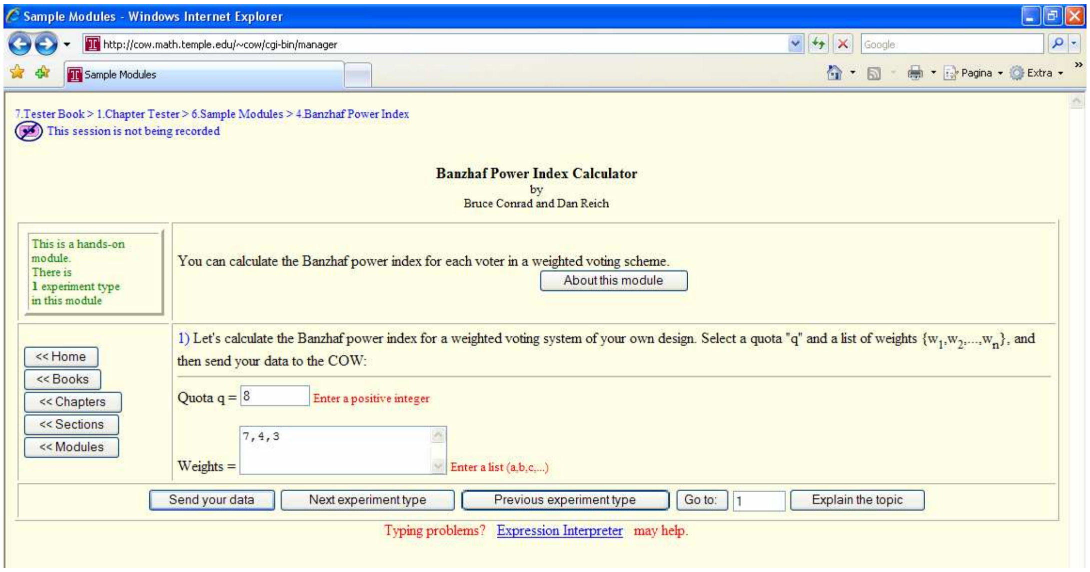
Site met veel info over Europese Unie en Tweede Kamer Nederland
http://www.tweedekamer.nl/
http://nl.wikipedia.org/wiki/Europees_Parlement#Samenstelling

Site met rekentool index Shapley-Shubik:
http://www.warwick.ac.uk/~ecaae/ssdirect.html



Bij “Number of Members or Players” wordt het aantal spelers (dit kunnen partijen zijn, maar ook personen) ingevuld die deelnemen aan de machtsstrijd. Quotum is het aantal stemmen nodig om voorstel aan te nemen. Weights staat voor het aantal stemmen dat iedere speler heeft, het gewicht. Deze worden ingevoerd en gescheiden met een spatie. Na klikken op calculate indices worden de indices berekend.

Site met rekentool index Banzhaf
http://www.math.temple.edu/~cow/bpi.html



Bij Quotum moet je het aantal stemmen invoeren nodig om voorstel aan te nemen. Weights staat voor de gewichten van de spelers. Deze worden ingevoerd en gescheiden met een spatie. Na klikken op send your data worden de indices berekend en netjes gepresenteerd.

4.5 Overzicht begrippen (en personen)

Bijlage 1

Gegevens Europese Unie

Het Europees Parlement bestaat uit 785 leden afkomstig uit 27 lidstaten. Tot de Europese verkiezingen van 10 juni 2004 bestond het EP uit 626 leden. Het aantal leden is uitgebreid na de toetreding van tien nieuwe landen in mei 2004, en opnieuw na de toetreding van Roemenië en Bulgarije in januari 2007.

Iedere lidstaat heeft een vastgesteld aantal afgevaardigden. In de huidige zittingsperiode (tot 2009) zijn dit er voor België 24, en voor Nederland 27.

De zetelverdeling vanaf 2007 naar partijen is de volgende:

- Fractie van de Europese Volkspartij (Christen-Democraten) en Europese Democraten (EVP-ED): 277
- Fractie van de Partij van de Europese Sociaaldemocraten (PES): 218
- Fractie van de Alliantie van Liberalen en Democraten voor Europa (ALDE): 106
- Fractie Unie voor een Europa van Nationale Staten (UEN): 44
- Fractie Europese Federatie van Groene Partijen/Europese Vrije Alliantie: 42
- Confederale Fractie Europees Unitair Links/Noords Groen Links (EUL/NGL): 41
- Fractie Onafhankelijkheid en Democratie Groep (IND/DEM): 23
- Fractie Identiteit, Traditie en Soevereiniteit (IST): 20
- Niet-ingeschrevenen: 14

Na de verkiezingen van 2004 veranderde een aantal fracties zijn naam: de fractie van de Europese Liberale en Democratische Partij (ELDR) verenigde zich met de nieuwe Europese Democratische Partij in de Alliantie van Liberalen en Democraten voor Europa (ADLE), waarbij de ELDR als Europese politieke partij blijft bestaan, en Europa van Democratieën in Diversiteit werd de fractie Onafhankelijkheid en Democratie Groep.

Na de Europese verkiezingen van juni 2004 zag de zetelverdeling tussen de landen er als volgt uit

- Duitsland 99
- Frankrijk 78
- Italië 78
- Verenigd Koninkrijk 78
- Spanje 54
- Polen 54
- Roemenië 35
- Nederland 27
- België 24
- Griekenland 24
- Portugal 24
- Tsjechië 24
- Hongarije 24
- Zweden 19
- Oostenrijk 18
- Bulgarije 18
- Denemarken 14
- Finland 14
- Slowakije 14
- Ierland 13
- Litouwen 13
- Letland 9
- Slovenië 7
- Estland 6
- Luxemburg 6
- Cyprus 6
- Malta 5