Opgave 1 Geef een Turing-machine die voor een string $s \in \{0,1\}^*$, $s = a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n$, de omkering $s^R \in \{0,1\}^*$, $s^R = a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1$, berekent. (20 ptn.)

Opgave 2 Bewijs dat het Halting Problem

$$\{ \langle M, X \rangle \mid \text{Turing-machine } M \text{ termineert op invoer } X \}$$

niet beslisbaar is. (20 ptn.)

Opgave 3 Beschouw het Directed Hamilton Path-probleem DHP

$$\{ \langle G \rangle \mid \text{gerichte graaf } G \text{ heeft een Hamilton-pad} \}$$

en het Travelling Salesman Problem TSP

$$\{ \langle G, d, n \rangle \mid \begin{array}{l} \text{volledige graaf } G \text{ met kanten-gewichtsfunctie } d \\ \text{heeft een Hamilton-circuit van gewicht hoogstens } n \end{array} \}$$

Bewijs de NP-volledigheid van TSP d.m.v. één of meer reducties uitgaande van de NP-volledigheid van DHP. (20 ptn.)

Opgave 4 Bewijs dat het Half-Clique Problem HGP

$$\{ \langle G \rangle \mid \text{graaf } G \text{ met } n \text{ knopen heeft een } n/2\text{-clique} \}$$

voor ongerichte grafen een NP-volledig beslissingprobleem is. (20 ptn.)
(Hint: Reduceer CLIQUE naar HGP. Onderscheid voor $\langle G, n \rangle$ of n kleiner, gelijk, groter het aantal knopen van G

Opgave 5 Gegeven een graaf $G = (V, E)$ met kanten-gewichtsfunctie $d\colon E \to \mathbb{N}$. De verzameling knopen V is opgesplitst is twee disjuncte deelverzamelingen, required nodes in R en Steiner-nodes in S. Een Steiner-tree is een deelboom van G die alle knopen in R een geen, sommige of alle knopen in S bevat. Het gewicht van een Steiner-tree is de som van de gewichten van zijn kanten.

a) Geef een factor 2 benaderingsalgoritme voor het vinden van een Steiner-tree optimalisatie-probleem. (10 ptn.)
b) Bewijs dat het algoritme dat bij onderdeel a) gevraagd wordt inderdaad een factor 2 benaderingsalgoritme is. (5 ptn.)
c) Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat het algoritme gevraagd bij onderdeel a) geen lagere benaderingsfactor heeft. (5 ptn.)

Het eindcijfer is het aantal behaalde punten delen door 10.