Opgave 1

a) Geef de definitie van het woordcorrespondentieprobleem, ook wel bekend als *Post Correspondence Problem.* (10 ptn.)

b) Het woordcorrespondentieprobleem is onbeslisbaar. Toon aan, eventueel door reductie van het woordcorrespondentieprobleem, dat er geen Turing-machine bestaat die de ambiguïteit van context-vrije grammatica's beslist. (15 ptn.)

Opgave 2 De stelling van Cook zegt dat SAT, vervulbaarheid van willekeurige propositionele formules, NP-volledig is.

a) Geef een beschrijving van het probleem 3SAT dat specifieke eisen aan de formules stelt. (10 ptn.)

b) De formules die corresponderen met een accepterend tableau in het bewijs van de stelling van Cook zijn de volgende:

- $\varphi_{\text{cell}} = \bigwedge_{i \in I, j \in J} \Big[(\bigvee_{s \in S} x_{i,j,s}) \wedge (\bigwedge_{s,t \in S, s \neq t} (\overline{x_{i,j,s}} \vee \overline{x_{i,j,t}})) \Big]$
- $\varphi_{\text{start}} = (\bigwedge_{-n^k \leq j \leq -1} x_{1,j,\#}) \wedge x_{1,o,q_0} \wedge (\bigwedge_{1 \leq j \leq n} x_{1,j,a_j}) \wedge (\bigwedge_{n_1 \leq j \leq n^k+1} x_{1,j,\#})$
- $\varphi_{\text{move}} = \bigwedge_{i \in I', j \in J'} \bigvee_{W(\omega_1,\ldots,\omega_6)} \bigwedge_{0 \leq \ell \leq 2} (x_{i-1,j+\ell,\omega_\ell} \wedge x_{i,j+\ell,\omega_{3+\ell}})$
- $\varphi_{\text{accept}} = \bigvee_{i \in I, j \in J} x_{i,j,q_{\text{yes}}}$

Beargumenteer waarom 3SAT ook NP-volledig is. (15 ptn.)

Opgave 3

a) Geef de definitie van een polynomiale reductie van een probleem A naar een probleem B. (5 ptn.)

b) Bewijs dat het beslissingsprobleem HALF-CLIQUE

$$\{ \langle G \rangle \mid \text{graaf } G, \text{ met } n \text{ knopen, heeft een volledige deelgraaf van tenminste } n/2 \text{ knopen} \}$$

NP-volledig is. (Hint: Reductie van CLIQUE.) (20 ptn.)

Opgave 4 Het optimalisatieprobleem *Metric Traveling Salesman* of mTSP vraagt naar een minimale Hamilton-toer in een volledige, ongerichte graaf $G = (V, E)$ met een metrische kostenfunctie op de kanten. Een kostenfunctie $\texttt{cost}\colon V \to \mathbb{N}$ is metrisch als

$$\texttt{cost}(u, w) \leq \texttt{cost}(u, v) + \texttt{cost}(v, w)$$

voor elk drietal knopen $u, v, w \in V$.

a) Geef een benaderingsalgoritme voor het optimalisatieprobleem TSP gebaseeerd op een *minimal spanning tree.* (10 ptn.)

b) Bewijs dat het algoritme gevraagd bij onderdeel a) een factor 2-approximatie-algoritme voor mTSP is. (15 ptn.)

Het eindcijfer is het aantal behaalde punten delen door 10.