Opgave 1 Zie bijlage *Onderzoek Algoritmen.* Elk goed antwoord 1 punt. Maximaal 10 punten.

Opgave 2 Een instructie voor een counter program is één van de drie vormen van een assignment ($X \leftarrow 0$, $X \leftarrow Y + 1$, $X \leftarrow Y - 1$) of een conditionele sprong (`if` $X = 0$ `then goto` L). Variabelen zijn niet-negatief en geheeltallig. Instructies zijn eventueel gelabeld.

a) Schrijf een counter program dat voor een variabele N, de waarde 2^N aflevert in de variabele R. (15 ptn.)

b) Beschrijf hoe een deterministische Turing-machine $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0)$ gerepresenteerd kan worden door een counter program. (15 ptn.)

Opgave 3 Gegeven zijn de volgende beslissingsproblemen voor ongerichte grafen:

$$\begin{aligned} UHP &= \{\, \langle G, s, t\rangle \mid G \text{ heeft een Hamilton-pad van } s \text{ naar } t \,\} \\ UHC &= \{\, \langle G\rangle \mid G \text{ heeft een Hamilton-circuit} \,\}. \end{aligned}$$

a) De afbeelding $\langle (V, E), s, t\rangle \mapsto \langle (V, E \cup \{(s, t)\}\rangle$, die een graaf met knopen s en t uitbreidt met een kant tussen s en t, is geen reductie van UHP naar UHC. Toon dit aan. (5 ptn.)

b) Bewijs $UHP \leq_P UHC$. (10 ptn.)

c) Bewijs dat $UHC \leq_P SAT$ d.m.v. een concrete reductie. (15 ptn.)
(Hint: Introduceer voor knopen v_i en v_j een variabele $x_{i,j}$ die waar is als v_i direct gevolgd wordt door v_j in het tentatieve Hamilton-circuit.)

Opgave 4 Het optimalisatie-probleem voor $COLORABILITY$ vraagt naar het minimaal aantal kleuren waarmee een graaf gekleurd kan worden (zodat buurknopen verschillende kleuren krijgen). Het beslissingsprobleem $k - COLORABILITY$ vraagt of het mogelijk is om een graaf met hoogstens k kleuren te kleuren. $2 - COLORABILITY$ is polynomiaal; $3 - COLORABILITY$ is NP-volledig.

a) Geef een algoritme dat een gegeven graaf G in hoogstens $d + 1$ kleuren kleurt, waarbij d het maximaal aantal buren in de graaf G aangeeft. (5 ptn.)

b) Geef een benaderingsalgoritme met factor $\lceil \frac{d+1}{3} \rceil$ en toon aan dat voor de benaderingswaarde *appr* en optimale waarde *opt* geldt dat $appr \leq \lceil \frac{d+1}{3} \rceil \cdot opt$. (15 ptn.)
(Hint: Toon eerst aan dat $appr \leq \frac{d+1}{3} \cdot opt$ als de graaf niet met 1 of 2 kleuren te kleuren is.)

c) Bewijs dat er geen benaderingsalgoritme met factor $\alpha < \frac{4}{3}$ voor $COLORABILITY$ bestaat, tenzij $P = NP$. (10 ptn.)

Het eindcijfer is het aantal behaalde punten delen door 10.