Opgave 1 Eenmalige opgave i.h.k.v. onderzoek op het gebied van Didactiek van de Wiskunde. (10 ptn.)

Opgave 2 Een instructie voor een counter program is één van de drie vormen van een assignment ($X \leftarrow 0$, $X \leftarrow Y+1$, $X \leftarrow Y-1$) of een conditionele sprong (`if` $X=0$ `then goto` L). Variabelen zijn niet-negatief en geheeltallig. Instructies zijn eventueel gelabeld.

a) Schrijf een counter program dat voor een variabele N, de waarde 2^N aflevert in de variabele R. (15 ptn.)

b) Beschrijf hoe een deterministische Turing-machine $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0)$ gerepresenteerd kan worden door een counter program. (15 ptn.)

a)

```
    // voor onvoorwaardelijk sprong
    Z <- 0
    R <- 0
    R <- R+1
LoopN:
    if N=0 goto EndLoopN
       // R := 2*R
       S <- 0
LoopR:
       if R=0 goto EndLoopR
          // S := S+2; R := R-1
          S <- S+1
          S <- S+1
          R <- R-1
          if Z=0 goto LoopR
EndLoopR:
       // R := S; N := N-1
       R <- S+1
       R <- R-1
       N <- N-1
       if Z=0 goto LoopN
EndLoopN:
```

b) Stel er zijn $n+1$ toestanden $q_0, q_1, \ldots, q_n$ en m symbolen $a_1, a_2, \ldots, a_m$. We laten a_0 de spatie of blank-symbool zijn. De bandinhoud wordt gerepresenteerd door de variabelen L, H en R, die respectievelijk, de bandinhoud links van de leeskop, het symbool onder de leeskop, en de bandinhoud rechts van de leeskop bevatten. Het stuk band links van de leeskop wordt, van rechts naar links, als getal in het $m+1$-tallig stelsel gezien; het stuk band rechts van de leeskop wordt, van links naar rechts, als $m+1$-tallig stelsel gezien. Het counter program bestaat uit blokken gelabeld met `State-0` t/m `State-n` voor elke toestand q precies één. In elk blok wordt afhankelijk van het symbool a onder de leeskop, i.e. de inhoud van variabele H, gesprongen naar een sub-blok dat bij toestand q en symbool a hoort. Afhankelijk van de beweging van de leeskop die $\delta(q, a)$ voorschrijft wordt de bandinhoud, i.e. de variabele L, H en R, aangepast en naar de nieuwe toestand, i.e. nieuw `State`-label gesprongen.

```
State-i:
    if H=0 goto State-i-Symbol-0
    H <- H-1
    if H=0 goto State-i-Symbol-1
```

```
   H <- H-1
   ...
   if H=0 goto State-i-Symbol-n
State-i-Symbol-0:
   ...
State-i-Symbol-j:
   // geval delta(q_i,a_j) = (q_k,a_p,<-)
   // voor beweging naar rechts vergelijkbaar
   // pseudo-code moet vertaald worden
   // naar counter program-formaat
   H := L mod (m+1)
   L := L div (m+1)
   R := R * (m+1) + p
   goto State-k
```

Opgave 3 Gegeven zijn de volgende beslissingsproblemen voor ongerichte grafen:

$$\begin{array}{lcl} UHP & = & \{ \langle G, s, t\rangle \mid G \text{ heeft een Hamilton-pad van } s \text{ naar } t \} \\ UHC & = & \{ \langle G\rangle \mid G \text{ heeft een Hamilton-circuit } \}. \end{array}$$

a) De afbeelding $\langle (V,E), s, t\rangle \mapsto \langle (V, E \cup \{(s,t)\}\rangle$, die een graaf met knopen s en t uitbreidt met een kant tussen s en t, is geen reductie van UHP naar UHC. Toon dit aan. (5 ptn.)

b) Bewijs $UHP \leq_P UHC$. (10 ptn.)

c) Bewijs dat $UHC \leq_P SAT$ d.m.v. een concrete reductie. (15 ptn.)
(Hint: Introduceer voor knopen v_i en v_j een variabele $x_{i,j}$ die waar is als v_i direct gevolgd wordt door v_j in het tentatieve Hamilton-circuit.)

a) De "ruitgraaf" (V,E) met knopen s,t,u,v en kanten $(s,u),(s,v),(u,t),(v,t)$ heeft *geen* Hamilton-pad van s naar t, maar de uitbreiding met een kant (s,t) heeft *wel* een Hamilton-circuit.

b) Definieer de afbeelding $f\colon \langle (V,E), s, t\rangle \mapsto \langle (V \cup \{*\}, E \cup \{(t,*),(*,s)\})\rangle$ die aan een graaf een nieuwe knoop '$*$' toevoegt, die nog niet in V voorkwam, plus twee kanten van '$*$' naar s en naar t. Deze afbeelding is polynomiaal.
Stel (V,E) heeft een Hamilton-pad van s naar t. Dan heeft $(V \cup \{*\}, E \cup \{(t,*),(*,s)\})$ een Hamilton-circuit dat bestaat uit het Hamilton-pad van s naar t uitgebreid met $(t,*)$ en $(*,s)$.
Stel $(V \cup \{*\}, E \cup \{(t,*),(*,s)\})$ heeft een Hamilton-circuit. Dit circuit loopt over de knoop '$*$' en moet, omdat er geen andere kanten naar '$*$' zijn, de kanten $(t,*)$ en $(*,s)$ bevatten. De rest van het Hamilton-circuit vormt dus een pad van s naar t dat alle knopen behalve '$*$' aandoet. Dit is een Hamilton-pad in de graaf (V,E).

c) We definiëren een afbeelding f van grafen naar propositionele formules als volgt: Aan een graaf $G = (V,E)$ met n knopen $v_1, \ldots, v_n$ voegen we de formule

$$\bigwedge_{i=1,\ldots,n} \Big(\bigvee_{\substack{j=1,\ldots,n \\ (v_i,v_j)\in E}} (x_{i,j} \wedge \bigwedge_{\substack{k=1,\ldots,n \\ k\neq i,j}} \bar{x}_{i,k}) \Big)$$

toe. Hierbij geeft $x_{i,j}$ aan dat knoop v_i in een tentatief Hamilton-circuit gevolgd wordt door knoop v_j. Deze afbeelding is polynomiaal in G (in feite kubisch). Wegens constructie heeft de graaf een Hamilton-circuit precies als en alleen als de bijbehorende formule een vervulling heeft.

Opgave 4 Het optimalisatie-probleem voor $COLORABILITY$ vraagt naar het minimaal aantal kleuren waarmee een graaf gekleurd kan worden (zodat buurknopen verschillende kleuren krijgen). Het beslissingsprobleem $k - COLORABILITY$ vraagt of het mogelijk is om een graaf met hoogstens k kleuren te kleuren. $2 - COLORABILITY$ is polynomiaal; $3 - COLORABILITY$ is NP-volledig.

a) Geef een algoritme dat een gegeven graaf G in hoogstens $d+1$ kleuren kleurt, waarbij d het maximaal aantal buren in de graaf G aangeeft. (5 ptn.)

b) Geef een benaderingsalgoritme met factor $\lceil \frac{d+1}{3} \rceil$ en toon aan dat voor de benaderingswaarde *appr* en optimale waarde *opt* geldt dat $appr \leq \lceil \frac{d+1}{3} \rceil \cdot opt$. (15 ptn.)
(Hint: Toon eerst aan dat $appr \leq \frac{d+1}{3} \cdot opt$ als de graaf niet met 1 of 2 kleuren te kleuren is.)

c) Bewijs dat er geen benaderingsalgoritme met factor $\alpha < \frac{4}{3}$ voor *COLORABILITY* bestaat, tenzij $P = NP$. (10 ptn.)

a)

```
start met alle knopen zonder kleur
voor alle knopen:
- kleur de knoop met een kleur verschillend
  van al zijn buren die tot dan toe gekleurd zijn
```

Dit algoritme werkt omdat er altijd meer kleuren beschikbaar zijn dan het mogelijk aantal buren.

b)

```
beslis eerst of de graaf 2-kleurbaar is
- zo ja,
  geef antwoord 1 als de graaf met 1 kleur kan worden gekleurd
  geef antwoord 2 als de graaf met 2 kleuren (maar niet met 1)
  kan worden gekleurd
- zo nee, bepaalde maximale uitgraad d en antwoord d+1
```

Als G 1- of 2-kleurbaar is, dan geldt $appr = opt$. Dus $appr = opt \leq \lceil \frac{d+1}{3} \rceil \cdot opt$ omdat $\lceil \frac{d+1}{3} \rceil \geq 1$.
Als G niet 1- of 2-kleurbaar is, geldt $opt \geq 3$, dus $appr = d + 1 \leq \frac{d+1}{opt} \cdot opt \leq \frac{d+1}{3} \cdot opt$.

c) Stel er is een (polynomiaal) benaderingsalgoritme met factor $\alpha < \frac{4}{3}$. Er geldt $opt \leq appr \leq \alpha \cdot opt < \frac{4}{3} \cdot opt$. Als G niet 3-kleurbaar is, hebben we $opt \geq 4$; als G wel 3-kleurbaar is, hebben we $appr < \frac{4}{3} \cdot opt \leq \frac{4}{3} \cdot 3 = 4$, dus $appr \leq 3$. Er geldt dus G is 3-kleurbaar $\iff$ $appr \leq 3$.
We kunnen dan het volgende polynomiaal beslissingsalgoritme voor 3-COLORABILITY definiëren:

```
bereken G de kleuringsapproximatie
is deze hoogstens 3, antwoord dan JA
is deze minstens 4, antwoord dan NEE
```

Omdat 3-COLORABILITY NP-volledig is en we dan een polynomiaal beslissingsalgoritme zouden hebben volgt P=NP.