TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Tentamen Basiswiskunde, 2DL00, donderdag 29 augustus 2013, 18.30–21.30 uur.

Het tentamen bestaat uit 13 opgaven.

De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden.

U mag géén gebruik maken van laptop, grafische rekenmachine en formulekaart.
U mag géén gebruik maken van een boek en ander schriftelijk materiaal.

---

1. Bepaal alle x in $\mathbb{R}$ waarvoor geldt dat $\dfrac{2x}{x-3} + \dfrac{x-3}{2x} \leq 2$.

2. Bepaal het Taylorpolynoom van de derde orde om $a = 3$ van $f(x) = \sqrt{x+1}$.
Wat is de vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $(3, 2)$?

3. Bepaal de vergelijking van de raaklijn aan de ellips gegeven door $2\,x^2 + 3\,y^2 = 5$ in het punt $(1, 1)$. Bepaal ook de vergelijking van de normaal in dat punt.

4. Schets in het platte vlak de verzameling van punten (x, y) die voldoen aan de ongelijkheden $x^2 + y^2 \leq 4\,x + 6\,y$ én $x \geq y$.

5. De hoek ϑ ligt in het interval $(\frac{1}{2}\,\pi, \pi)$ en $\sin(\vartheta) = \frac{1}{3}$.

   Bepaal $\cos(\vartheta)$ en $\tan(\vartheta)$.

6. Gegeven is de functie f met $f(x) = \dfrac{2\,x - 5}{x + 2}$.

   Bereken de inverse functie f^{-1}.

7. Bereken de limiet $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - x^2 - 7\,x + 7}{x^2 - 1}$.

zie de volgende pagina

8. Bepaal $\displaystyle\int \frac{\big(2+\ln(x)\big)^3}{x}\,\mathrm{d}x\,.$

9. Bepaal $\displaystyle\int_0^{1/5} x\,\mathrm{e}^{5\,x}\,\mathrm{d}x\,.$

10. Bepaal de integraal $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\,.$

11. Laat zien dat voor alle $x>0$ geldt dat $\ln(5+x)-\ln(5)<\dfrac{1}{5}\,x\,.$

12. Van de functie f is het Taylorpolynoom van derde orde om $a=2$ het polynoom $p_3(x)=7+2\,(x-2)-3\,(x-2)^2+5\,(x-2)^3\,.$

    (a) Bereken $f(2), f'(2), f^{(2)}(2)$ en $f^{(3)}(2)$.

    (b) Geef een schatting van $f(2.1)$ met behulp van $p_3\,.$

    (c) Geef een uitdrukking voor het verschil $f(2.1)-p_3(2.1)$ met behulp van $f^{(4)}$.

13. (a) Vereenvoudig $\cos(\arcsin(x))\,.$

    (b) Vereenvoudig $\cos(2\,\arcsin(x))\,.$

Voor de opgaven kunnen de volgende aantallen punten worden behaald:

Opgave	1:	3	punten	Opgave	7:	3	punten	Opgave	12a:	2	punten
Opgave	2:	3	punten	Opgave	8:	2	punten		12b:	2	punten
Opgave	3:	3	punten	Opgave	9:	3	punten		12c:	1	punt
Opgave	4:	3	punten	Opgave	10:	3	punten	Opgave	13a:	2	punten
Opgave	5:	3	punten	Opgave	11:	3	punten		13b:	1	punt
Opgave	6:	3	punten								

Het cijfer voor het tentamen wordt bepaald door het totaal der behaalde punten door 4 te delen en het resultaat tot een geheel getal af te ronden.

Integratietabel

$g(x)$	$\int g(x)\mathrm{d}x$
$x^n, n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\|x\|)$
$\frac{f'(x)}{f(x)}$	$\ln(\|f(x)\|)$
e^x	e^x
$a^x, a > 0, a \neq 1$	$\frac{a^x}{\ln(a)}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\frac{1}{\sin^2(x)}$	$-\cot(x)$
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$
$\tan(x)$	$-\ln(\|\cos(x)\|)$
$\frac{1}{\sin(x)}$	$\ln(\|\tan(\frac{x}{2})\|)$
$\frac{1}{\cos(x)}$	$\ln(\|\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})\|)$
$\mathrm{e}^{ax}\sin(bx), a^2+b^2>0$	$\frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2+b^2}\left(a\sin(bx)-b\cos(bx)\right)$
$\mathrm{e}^{ax}\cos(bx), a^2+b^2>0$	$\frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2+b^2}\left(a\cos(bx)+b\sin(bx)\right)$
$\frac{1}{a^2+x^2}, a>0$	$\frac{1}{a}\ \arctan(\frac{x}{a})$
$\frac{1}{a^2-x^2}, a>0$	$\frac{1}{2a}\ \ln(\left\|\frac{a+x}{a-x}\right\|)$
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}, a>0$	$\arcsin(\frac{x}{a})$
$\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}, a>0$	$\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}, a>0$	$\ln(\left\|x+\sqrt{x^2-a^2}\right\|)$
$\sqrt{a^2-x^2}, a>0$	$\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\ \arcsin(\frac{x}{a})$
$\sqrt{a^2+x^2}, a>0$	$\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\ \ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$
$\sqrt{x^2-a^2}, a>0$	$\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}+\frac{a^2}{2}\ \ln(\left\|x+\sqrt{x^2-a^2}\right\|)$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
$\tanh(x)$	$\ln(\cosh(x))$

Opmerkingen
De parameters in de tabel zijn reële getallen.
De integratieconstanten zijn weggelaten.

Taylorpolynomen

Functie	Taylorpolynoom plus grote-O-term
e^x	$1 + x + \frac{1}{2}\,x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\,x^n + O(x^{n+1})$
$\cos(x)$	$1 - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{24}\,x^4 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2\,n)!}\,x^{2\,n} + O(x^{2\,n+1})$
$\sin(x)$	$x - \frac{1}{6}\,x^3 + \frac{1}{120}\,x^5 + \cdots + \frac{(-1)^n\,x^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} + O(x^{2\,n+2})$
$\frac{1}{1+x}$	$1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n\,x^n + O(x^{n+1})$
$\ln(1+x)$	$x - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{3}\,x^3 + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}\,x^{n+1} + O(x^{n+2})$
$\frac{1}{1+x^2}$	$1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n\,x^{2\,n} + O(x^{2\,n+1})$
$\arctan(x)$	$x - \frac{1}{3}\,x^3 + \frac{1}{5}\,x^5 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2\,n+1)}\,x^{2\,n+1} + O(x^{2\,n+2})$
$(1+x)^\alpha$	$1 + \binom{\alpha}{1}\,x + \binom{\alpha}{2}\,x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n}\,x^n + O(x^{n+1})$

- Alle Taylorpolynomen zijn polynomen rond het punt 0.
- De binomiaalcoëfficiënten worden gedefinieerd door

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot (\alpha-2) \cdots (\alpha-(k-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k}\ ,\ k = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\binom{\alpha}{0} = 1$$