TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Uitwerking Tentamen Basiswiskunde, 2DL03, woensdag 3 oktober 2007.

Algemeen deel

1. Bij het vermenigvuldigen met x van de ongelijkheid moet u rekening houden met twee gevallen, te weten $x > 0$ en $x < 0$ en u moet beseffen dat $x = 0$ geen oplossing is. Het is beter om alles naar links te brengen en naar de tekenwisselingen van de nieuwe linkerkant te kijken.

   $$\frac{x}{2} - 1 - \frac{4}{x} \geq 0, \quad \frac{x^2 - 2\,x - 8}{2\,x} \geq 0, \quad \frac{(x-4)\,(x+2)}{2\,x} \geq 0.$$

   De laatste breuk wisselt van teken bij $x = -2$, $x = 0$ en $x = 4$. Anders gezegd: de teller is niet negatief als $x \leq -2$ of $x \geq 4$ en negatief als $-2 < x < 4$ en de noemer is negatief als $x < 0$ en positief als $x > 0$.

   Figuur 1: Tekenverloop laatste breuk

   De ongelijkheid geldt voor x met $-2 \leq x < 0$ of $x \geq 4$.

2. Het domein van f bestaat uit $\mathbb{R}$ uitgezonderd 2 ofwel $D(f) = (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$. De grafiek heeft een verticale asymptoot bij $x = 2$, immers rond $x = 2$ is de teller van de breuk ongeveer 3 terwijl de noemer ongeveer 0 is of negatief of positief. Als x naar ∞ gaat, dan gaat $f(x)$ naar 4. Als x naar $-\infty$ gaat, dan gaat $f(x)$ naar 4. Een ruwe schets ziet er als volgt uit:

   Figuur 2: Grafiek f

zie volgende pagina

2. (Vervolg) Het bereik $R(f)$ is gelijk aan $(-\infty, 4) \cup (4, \infty)$, want de breuk kan iedere waarde aannemen behalve 1.

3. Er geldt dat $f(g(x)) = \dfrac{g(x)-1}{g(x)}$. De vergelijking $\dfrac{g(x)-1}{g(x)} = \mathrm{e}^x$ met onbekende $g(x)$ moet worden opgelost.
   Dus $g(x) - 1 = g(x)\,\mathrm{e}^x$ ofwel $g(x) - g(x)\,\mathrm{e}^x = g(x)\,(1-\mathrm{e}^x) = 1$.
   Dus $g(x) = \dfrac{1}{1-\mathrm{e}^x}$. Dit antwoord is volledig goed gerekend.
   In principe geldt dat $g(x) = \dfrac{1}{1-\mathrm{e}^x}$ voor $x \neq 0$. Merk op dat $g(x) \neq 0$ voor alle $x \neq 0$.

4. Laat $A = \dfrac{\cos(x)-\sin(x)}{\cos(x)+\sin(x)} - \dfrac{\cos(x)+\sin(x)}{\cos(x)-\sin(x)}$. Dan is

$$A = \frac{(\cos(x)-\sin(x))^2}{(\cos(x)+\sin(x))(\cos(x)-\sin(x))} - \frac{(\cos(x)+\sin(x))^2}{(\cos(x)-\sin(x))(\cos(x)+\sin(x))} =$$

$$= \frac{\cos^2(x) - 2\,\cos(x)\,\sin(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)-\sin^2(x)} - \frac{\cos^2(x) + 2\,\cos(x)\,\sin(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)-\sin^2(x)} =$$

$$= \frac{1 - 2\,\cos(x)\,\sin(x) - \Big(1 + 2\,\cos(x)\,\sin(x)\Big)}{\cos^2(x)-\sin^2(x)} = -\frac{4\,\cos(x)\,\sin(x)}{\cos^2(x)-\sin^2(x)}$$

$$= -\frac{2\,\sin(2\,x)}{\cos(2\,x)} = -2\,\tan(2\,x)\,.$$

5. Laat $f(x) = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x-1}}$.
   Methode 1 Stug doorrekenen geeft

$$f'(x) = -\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{x-1}\right)^2} \cdot \left(1+\frac{1}{x-1}\right)' = -\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{x-1}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{(x-1)^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{x-1}\right)^2 (x-1)^2} = \frac{1}{\left(x-1+\dfrac{x-1}{x-1}\right)^2} = \frac{1}{x^2}\,.$$

   Methode 2 Eerst vereenvoudigen en dan differentiëren geeft

$$f(x) = \frac{x-1}{x-1+1} = \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x}\,.$$

   Nu is $f'(x) = -(-\dfrac{1}{x^2}) = \dfrac{1}{x^2}\,.$

zie volgende pagina

6. Er geldt dat $p_2(x) = 3 - 2\,(x-1) - 5\,(x-1)^2 = f(1) + f'(1)\,(x-1) + \dfrac{f''(1)}{2}\,(x-1)^2$ voor alle x.

   (a) De vergelijking van de raaklijn luidt $y - f(1) = f'(1)\,(x-1)$. Uit de gegevens volgt dat $f(1) = 3$ en $f'(1) = -2$. De gevraagde vergelijking is $y - 3 = -2\,(x-1)$ ofwel $2\,x + y = 5$.

   (b) Rond het punt $(1, f(1))$ ligt de grafiek van f onder de raaklijn omdat rond het punt 1, maar $x \neq 1$, geldt dat $f(x) = 3 - 2\,(x-1) \underbrace{-5\,(x-1)^2 + \cdots}_{<0}$.

7. Er geldt dat $\displaystyle\int \frac{1+\cos^3(x)}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x + \int \cos(x)\,\mathrm{d}x\,.$

   Dan geldt dat $\displaystyle\int \frac{1+\cos^3(x)}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x = \tan(x) + \sin(x) + C$ voor een zekere constante C.

8. U kunt de integraal eerst uitrekenen en dan het resultaat differentiëren, maar dat is veel werk. Laat de functie H zó zijn dat $H'(t) = t\,\sin(t)$.
   Dan $\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_x^{\pi} t\,\sin(t)\,\mathrm{d}t\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(H(\pi) - H(x)\Big) = -H'(x) = -x\,\sin(x).$

9. Stel $u = x^2 + 2\,x$. Dan geldt dat $\mathrm{d}u = 2\,(x+1)\,\mathrm{d}x$, de ondergrens $x = 0$ komt overeen met $u = 0$ en de bovengrens $x = 1$ komt overeen met $u = 3$. Dan $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-(x^2+2x)}\,(x+1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^3 \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\,\Big|{-\mathrm{e}^{-u}}\Big|_0^3 = \frac{1}{2}\,(1 - \mathrm{e}^{-3}).$

Schakeldeel/doorstroomdeel

10. Nu is $p'(x) = 3\,x^2 - 3 = 3\,(x-1)\,(x+1)$. Dus p heeft een maximum in $x = -1$ met waarde $p(-1) = 6$ en een minimum in $x = 1$ met waarde $p(1) = 2$. De grafiek ziet er als volgt uit:

Figuur 3: Grafiek p

zie volgende pagina

10. (Vervolg)
Een derdegraads polynoom heeft hooguit drie nulpunten. Voor $x \geq -1$ kan p geen nulpunten hebben. Voor $x < -1$ kan p hooguit een nulpunt hebben, omdat de functie daar stijgt. Omdat p continu is, $p(-3) = -14$ en $p(-2) = 2$, heeft p een nulpunt in het interval $(-3, -2)$.

11. Laat $f(x) = \ln(x)$. dan $f'(x) = \dfrac{1}{x}$. Nu is $\ln(x+1) - \ln(x) = f(x+1) - f(x)$.
De middelwaardestelling zegt dat er een c tussen x en $x+1$ bestaat zodanig dat
$\dfrac{f(x+1) - f(x)}{x+1-x} = f'(c)$.
Dus $\ln(x+1) - \ln(x) = \dfrac{1}{c}$.
Nu is $0 < x < c < x+1$, dus zeker $\dfrac{1}{c} > \dfrac{1}{x+1}$.
Conclusie: $\ln(x+1) - \ln(x) = \dfrac{1}{c} > \dfrac{1}{x+1}$.

12. (a) Uit de tabel volgt dat $p_2(x) = 1 + x + \dfrac{1}{2}x^2$.
De benadering voor $\mathrm{e}^{0.1}$ is $p_2(0.1) = 1 + 0.1 + \dfrac{1}{2}0.01 = 1.105$.

(b) Merk op dat $\mathrm{e}^{0.1} = p_2(0.1) + \dfrac{f^{(3)}(c)}{6}(0.1)^3$ voor een zekere c tussen 0 en 0.1.
Nu is $f^{(3)}(x) = \mathrm{e}^x > 0$ voor alle x, dus het verschil van $\mathrm{e}^{0.1}$ en $p_2(0.1)$, te weten $\mathrm{e}^{0.1} - p_2(0.1)$ is positief en kleiner dan $\dfrac{1}{3}0.001 = 0.00034$. Het verschil is in ieder geval groter dan 0.00016 .

13. Met partiële integratie. Laat $A = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln(x)}{x^4}\,\mathrm{d}x$. Dan

$$A = \int_1^{\mathrm{e}} \underbrace{\frac{1}{x^4}}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{g(x)}\,\mathrm{d}x = \left|(-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^3})\cdot\ln(x)\right|_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} (-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^3})\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^3}\cdot\ln(\mathrm{e}) + 0 + \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^4}\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{\mathrm{e}^{-3}}{3} + \left|-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{x^3}\right|_1^{\mathrm{e}} = -\frac{\mathrm{e}^{-3}}{3} - -\frac{\mathrm{e}^{-3}}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1}{9} - \frac{4}{9}\mathrm{e}^{-3}.$$

zie volgende pagina

14. Er geldt dat $\arctan(\tan(x)) = x$ voor $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$. De tangens heeft periode π. Dus

$$\arctan\big(\tan\big(\frac{8}{3}\,\pi\big)\big) = \arctan\big(\tan\big((\frac{8}{3}-3)\,\pi\big)\big) = \arctan\big(\tan\big(-\frac{1}{3}\,\pi\big)\big) = -\frac{1}{3}\,\pi\,.$$