TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Tentamen Basiswiskunde, 2DL03, maandag 10 november 2008, 9.00–12.00 uur.

Geef op het eerste vel met uitwerkingen aan welk programma (Schakelprogramma of HBO-minor) u volgt.
Als u nog geen identiteitsnummer heeft, zet dan op het eerste vel na **Ident.nr:** het woord GEEN.

Het tentamen bestaat uit het **Algemeen deel** en het **Schakeldeel/doorstroomdeel**.
Het **Algemeen deel** heeft een omvang van twee uur en bestaat uit 9 opgaven waar u 40 punten voor kunt halen.
Het **Schakeldeel/doorstroomdeel** heeft een omvang van een uur en bestaat uit 5 opgaven waar u 20 punten voor kunt halen.
Voor de onderverdeling van de punten, zie achteraan.
Als u beide delen maakt, dan krijgt u twee cijfers, een voor het eerste deel en een voor het geheel.

Alle studenten moeten het **Algemeen deel** maken.
HBO-studenten die een minor Academische oriëntatie doen, hoeven alleen dit deel te maken. Zij mogen hier drie uur over doen.
Alle andere studenten moeten ook het **Schakeldeel/doorstroomdeel** maken.
Voor HAN-studenten: het **Algemeen deel** is niveau 3 en het **Algemeen deel** plus het **Schakeldeel/doorstroomdeel** is niveau 4.

De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden.

U mag géén gebruik maken van laptop, grafische rekenmachine en formulekaart.
U mag géén gebruik maken van het boek en ander schriftelijk materiaal.

Algemeen deel

1. Bepaal alle x in $\mathbb{R}$ waarvoor geldt dat: $\dfrac{2x}{x-3} + \dfrac{x-3}{2x} \leq 2$.

2. Bepaal het Taylorpolynoom van derde orde om $x = 3$ van $f(x) = \sqrt{x+1}$.
   Wat is de vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van f in het punt (3,2)?

3. Bepaal de vergelijking van de raaklijn aan de ellips gegeven door $2x^2 + 3y^2 = 5$ in het punt P(1,1). Bepaal ook de vergelijking van de normaal in dat punt.

zie volgende pagina

4. Schets in het platte vlak de verzameling van punten (x, y) die voldoen aan de ongelijkheden $x^2 + y^2 \leq 4x + 6y$ én $x \geq y$.

5. De hoek ϑ ligt in het interval $(\frac{1}{2}\pi, \pi)$ en $\sin(\vartheta) = \frac{1}{3}$.

   Bepaal $\cos(\vartheta)$ en $\tan(2\vartheta)$.

6. Gegeven is de functie f met $f(x) = \frac{2x-5}{x+2}$
   a) Bepaal de asymptoten.
   b) Bereken de inverse functie f^{-1}.

7. Bereken de volgende limieten:

   a) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 9}{2x - 6}$.

   b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - x^2 - 7x + 7}{x - 1}$.

8. Bepaal $\displaystyle\int \frac{(2 + \ln(x))^3}{x}\, \mathrm{d}x$.

9. Bepaal $\displaystyle\int x e^{5x}\, \mathrm{d}x$.

Schakeldeel/doorstroomdeel

10. Bepaal de integraal $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arctan(2x)}{1 + 4x^2}\, \mathrm{d}x$.

11. Laat zien dat voor alle $x > 0$ geldt dat $\ln(5 + x) - \ln(5) < \dfrac{1}{5}x$.

12. Van de functie f is het Taylorpolynoom van derde orde om $x = 2$ gegeven.
    $p_3(x) = 7 + 2(x - 2) - 3(x - 2)^2 + 5(x - 2)^3$.

    (a) Bereken $f(2), f'(2), f''(2), f^{(3)}(2)$ en maak een schatting van $f(2.1)$.

    (b) Indien bovendien gegeven is dat $0 < f^{(4)}(x) \leq 12$ op het interval $[2\,,\ 2.1]$ maak dan een schatting van de fout $E_3(2.1)$.
    Hierin is zoals bekend $f(2.1) = p_3(2.1) + E_3(2.1)$.

zie volgende pagina

13. Bepaal de integraal $\int x^2 \cos x \, \mathrm{d}x$.

14. Toon aan dat $\cos(2 \arcsin(x)) = 1 - 2x^2$.

Voor de opgaven kunnen de volgende aantallen punten worden behaald:

Algemeen deel

Opgave	1:	5	punten	Opgave	5:	4	punten	Opgave	7b:	2	punten
Opgave	2:	6	punten	Opgave	6a:	2	punten	Opgave	8:	4	punten
Opgave	3:	4	punten	Opgave	6b:	3	punten	Opgave	9:	4	punten
Opgave	4:	4	punten	Opgave	7a:	2	punten				

Het cijfer voor het **Algemeen deel** wordt bepaald door het totaal der behaalde punten van dit gedeelte door 4 te delen en tot een geheel getal af te ronden.

Schakeldeel/doorstroomdeel

Opgave	10:	4	punten	Opgave	12a:	3	punten	Opgave	13:	4	punten
Opgave	11:	4	punten	Opgave	12b:	2	punten	Opgave	14:	3	punten

Het cijfer voor het **hele tentamen** wordt bepaald door het totaal der behaalde punten van beide gedeelten door 6 te delen en tot een geheel getal af te ronden.

Integratietabel

$g(x)$	$\int g(x)\mathrm{d}x$
$x^n, n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert)$
$\frac{f'(x)}{f(x)}$	$\ln(\lvert f(x)\rvert)$
e^x	e^x
$a^x, a > 0, a \neq 1$	$\frac{a^x}{\ln(a)}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\frac{1}{\sin^2(x)}$	$-\cot(x)$
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$
$\tan(x)$	$-\ln(\lvert\cos(x)\rvert)$
$\frac{1}{\sin(x)}$	$\ln(\lvert\tan(\frac{x}{2})\rvert)$
$\frac{1}{\cos(x)}$	$\ln(\lvert\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})\rvert)$
$e^{ax}\sin(bx), a^2+b^2>0$	$\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\,(a\sin(bx)-b\cos(bx))$
$e^{ax}\cos(bx), a^2+b^2>0$	$\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\,(a\cos(bx)+b\sin(bx))$
$\frac{1}{a^2+x^2}, a>0$	$\frac{1}{a}\ \arctan(\frac{x}{a})$
$\frac{1}{a^2-x^2}, a>0$	$\frac{1}{2a}\ \ln\left(\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert\right)$
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}, a>0$	$\arcsin(\frac{x}{a})$
$\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}, a>0$	$\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}, a>0$	$\ln\left(\left\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\right\rvert\right)$
$\sqrt{a^2-x^2}, a>0$	$\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\ \arcsin(\frac{x}{a})$
$\sqrt{a^2+x^2}, a>0$	$\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\ \ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$
$\sqrt{x^2-a^2}, a>0$	$\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}+\frac{a^2}{2}\ \ln\left(\left\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\right\rvert\right)$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
$\tanh(x)$	$\ln(\cosh(x))$

Opmerkingen

De parameters in de tabel zijn reële getallen.

De integratieconstanten zijn weggelaten.

Taylorpolynomen

Functie	Taylorpolynoom plus grote-O-term
e^x	$1 + x + \frac{1}{2}\,x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\,x^n + O(x^{n+1})$
$\cos(x)$	$1 - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{24}\,x^4 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2\,n)!}\,x^{2\,n} + O(x^{2\,n+1})$
$\sin(x)$	$x - \frac{1}{6}\,x^3 + \frac{1}{120}\,x^5 + \cdots + \frac{(-1)^n\,x^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} + O(x^{2\,n+2})$
$\frac{1}{1+x}$	$1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n\,x^n + O(x^{n+1})$
$\ln(1+x)$	$x - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{3}\,x^3 + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}\,x^{n+1} + O(x^{n+2})$
$\frac{1}{1+x^2}$	$1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n\,x^{2\,n} + O(x^{2\,n+1})$
$\arctan(x)$	$x - \frac{1}{3}\,x^3 + \frac{1}{5}\,x^5 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2\,n+1)}\,x^{2\,n+1} + O(x^{2\,n+2})$
$(1+x)^\alpha$	$1 + \binom{\alpha}{1}\,x + \binom{\alpha}{2}\,x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n}\,x^n + O(x^{n+1})$

- Alle Taylorpolynomen zijn polynomen rond het punt 0.
- De binomiaalcoëfficiënten worden gedefinieerd door

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot (\alpha-2) \cdots (\alpha-(k-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k}\ ,\ k = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\binom{\alpha}{0} = 1$$