TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Tentamen Basiswiskunde, 2DL03, woensdag 4 november 2009, 9.00–12.00 uur.

Geef op het eerste vel met uitwerkingen aan welk programma (Schakelprogramma of TU/e-minor) u volgt.

Mededeling alleen voor studenten van Fontys die van de TU/e-minor naar de Fontys-minor Academische oriëntatie Beta zijn overgestapt:
Voor het HBO-cijfer tellen **niet** mee de (deel) opgaven

De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden.

U mag géén gebruik maken van laptop, grafische rekenmachine en formulekaart.
U mag géén gebruik maken van het boek en ander schriftelijk materiaal.

---

1. Gegeven zijn voor alle $a \neq 0$ de functies f_a met
   $f_a(x) = \ln(\sqrt{a^2 + x^2} + x) + \ln(\sqrt{a^2 + x^2} - x)$.
   (a) Bereken $f_a'(x)$.
   (b) Toon aan dat voor alle $a \neq 0$ de functie f_a een constante functie is.
2. Gegeven is de functie f met $f(x) = \ln(2x - 5)$.
   (a) Toon aan dat $f'(x) > 0$ op het domein van f.
   (b) Bereken $f^{-1}(x)$.
   (c) Bereken $(f^{-1})'(0)$.
3. Los de vergelijking op $\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{2} = \frac{10}{3}$.
4. Bepaal het Taylorpolynoom van tweede orde om $x = 1$ van $f(x) = \arctan x$.
   Wat is de vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $(1, \frac{1}{4}\pi)$?
5. Bepaal de vergelijking van de raaklijn aan de kromme k gegeven door $y^3 - x^2 = y^2 - x$ in het punt P(1,1).
6. Bewijs de identiteit $\tan(x)\cos(2x) = \sin(2x) - \tan(x)$.

zie volgende pagina

7. Toon aan dat $\sqrt{x+4}-2<\dfrac{1}{4}x$ voor alle $x>0$.

8. Bepaal de vergelijkingen van de twee raaklijnen aan de grafiek van $y=\arctan(x)$ met richtingscoëfficiënt $\frac{1}{2}$.

9. Gegeven is de functie f met $f(x)=\sqrt{2x+3}$.
   Geef de antwoorden zonder gebruik van rekenapparaat.

   (a) Bepaal de linearisatie van f om $x=3$.

   (b) Bepaal de benadering van $\sqrt{9.2}$ door gebruik te maken van deze linearisatie.

   (c) Is $\sqrt{9.2}$ groter of kleiner dan de benadering uit onderdeel(b)?
   Geef een schatting voor het verschil.

10. (a) Bereken $\displaystyle\int_{-1}^{3}|2t-3|\,\mathrm{d}t$.

    (b) Wat is de gemiddelde waarde van $f(t)=|2t-3|$ op het interval [-1,3]?
    En in welke punt(en) wordt deze gemiddelde waarde aangenomen?

11. Bereken $\displaystyle\int_{1}^{2}x\sqrt{x-1}\,\mathrm{d}x$.

12. Gegeven is de funtie F met $F(x)=\int_0^x \frac{-t^2+t+6}{t^6+1}\,\mathrm{d}t$.

    (a) Bereken $F'(x)$.

    (b) Voor welke x geldt $F'(x)=0$?

13. Bereken $\displaystyle\int_{0}^{\pi}x^2\sin(x)\mathrm{d}x$.

14. Bereken $\displaystyle\int_{0}^{1}e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

zie volgende pagina

Tentamen Basiswiskunde, 2DL03, woensdag 4 november 2009, 9.00–12.00 uur

---

Voor de opgaven kunnen de volgende aantallen punten worden behaald:

Opgave	1a:	2	punten	Opgave	5:	4	punten	Opgave	10b :	3	punten
Opgave	1b:	2	punten	Opgave	6:	4	punten	Opgave	11 :	4	punten
Opgave	2a:	2	punten	Opgave	7:	4	punten	Opgave	12a :	2	punten
Opgave	2b:	2	punten	Opgave	8:	4	punten	Opgave	12b :	2	punten
Opgave	2c:	1	punten	Opgave	9a:	2	punten	Opgave	13 :	5	punten
Opgave	3:	4	punten	Opgave	9b:	1	punten	Opgave	14 :	4	punten
Opgave	4a:	3	punten	Opgave	9c:	2	punten				
Opgave	4b:	1	punten	Opgave	10a:	2	punten				

Het cijfer voor het tentamen wordt bepaald door het totaal der behaalde punten door 6 te delen en tot een geheel getal af te ronden.

Integratietabel

$g(x)$	$\int g(x)\mathrm{d}x$
$x^n, n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\|x\|)$
$\frac{f'(x)}{f(x)}$	$\ln(\|f(x)\|)$
e^x	e^x
$a^x, a > 0, a \neq 1$	$\frac{a^x}{\ln(a)}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\frac{1}{\sin^2(x)}$	$-\cot(x)$
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$
$\tan(x)$	$-\ln(\|\cos(x)\|)$
$\frac{1}{\sin(x)}$	$\ln(\|\tan(\frac{x}{2})\|)$
$\frac{1}{\cos(x)}$	$\ln(\|\tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})\|)$
$e^{ax}\sin(bx), a^2 + b^2 > 0$	$\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\,(a\sin(bx) - b\cos(bx))$
$e^{ax}\cos(bx), a^2 + b^2 > 0$	$\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\,(a\cos(bx) + b\sin(bx))$
$\frac{1}{a^2+x^2}, a > 0$	$\frac{1}{a}\ \arctan(\frac{x}{a})$
$\frac{1}{a^2-x^2}, a > 0$	$\frac{1}{2a}\ \ln(\left\|\frac{a+x}{a-x}\right\|)$
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}, a > 0$	$\arcsin(\frac{x}{a})$
$\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}, a > 0$	$\ln(x + \sqrt{x^2+a^2})$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}, a > 0$	$\ln(\left\|x + \sqrt{x^2-a^2}\right\|)$
$\sqrt{a^2-x^2}, a > 0$	$\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\ \arcsin(\frac{x}{a})$
$\sqrt{a^2+x^2}, a > 0$	$\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ \ln(x + \sqrt{x^2+a^2})$
$\sqrt{x^2-a^2}, a > 0$	$\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} + \frac{a^2}{2}\ \ln(\left\|x + \sqrt{x^2-a^2}\right\|)$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
$\tanh(x)$	$\ln(\cosh(x))$

Opmerkingen

De parameters in de tabel zijn reële getallen.
De integratieconstanten zijn weggelaten.

Taylorpolynomen

Functie	Taylorpolynoom plus grote-O-term
e^x	$1 + x + \frac{1}{2}\, x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\, x^n + O(x^{n+1})$
$\cos(x)$	$1 - \frac{1}{2}\, x^2 + \frac{1}{24}\, x^4 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2\,n)!}\, x^{2\,n} + O(x^{2\,n+1})$
$\sin(x)$	$x - \frac{1}{6}\, x^3 + \frac{1}{120}\, x^5 + \cdots + \frac{(-1)^n\, x^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} + O(x^{2\,n+2})$
$\frac{1}{1+x}$	$1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n\, x^n + O(x^{n+1})$
$\ln(1+x)$	$x - \frac{1}{2}\, x^2 + \frac{1}{3}\, x^3 + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}\, x^{n+1} + O(x^{n+2})$
$\frac{1}{1+x^2}$	$1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n\, x^{2\,n} + O(x^{2\,n+1})$
$\arctan(x)$	$x - \frac{1}{3}\, x^3 + \frac{1}{5}\, x^5 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2\,n+1)}\, x^{2\,n+1} + O(x^{2\,n+2})$
$(1+x)^\alpha$	$1 + \binom{\alpha}{1}\, x + \binom{\alpha}{2}\, x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n}\, x^n + O(x^{n+1})$

- Alle Taylorpolynomen zijn polynomen rond het punt 0.
- De binomiaalcoëfficiënten worden gedefinieerd door

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot (\alpha-2) \cdots (\alpha-(k-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k}\ ,\ k = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\binom{\alpha}{0} = 1$$