Uitwerkingen : 20 – 1 – 2010 2 DL03

Opgave 1.

$$\frac{x+2}{x+3}+\frac{x+1}{2x+3}\le 1 \quad\to$$

$$\frac{(x+2)(2x+3)+(x+1)(x+3)-(x+3)(2x+3)}{(x+3)(2x+3)}\le 0 \to \frac{x^2+2x}{(x+3)(2x+3)}\le 0 \to \frac{x(x+2)}{(x+3)(2x+3)}\le 0$$

Dan een tekenoverzicht maken $\to$ $x \in (-3,-2] \cup \left(-\frac{3}{2}, 0\right]$.

Opgave 2.

$f(x)=2e^{3x} \to f'(x)=6e^{3x}$.

(a) Dus $f'(x) = 12 \;\to\; e^{3x}=2 \;\to\; 3x=\ln 2 \;\to\; x=\frac{1}{3}\ln 2$.

(b) Een vergelijking van f^{-1} is $x =$

$2e^{3y}-1$ ofwel $3y=\ln\left(\frac{x+1}{2}\right)$ ofwel $f^{-1}(x)=\frac{1}{3}\ln\left(\frac{x+1}{2}\right)$.

Opgave 3.

Bekend is dat $p_3(x)=f(5)+f'(5)(x-5)+\frac{f''(5)}{2!}(x-5)^2+\frac{f^{(3)}(5)}{3!}(x-5)^3$

(a) $f(5)=10$ $f'(5)=0$ $f''(5)=6$ en $f^{(3)}(2)=30$. En $p(5.1)=10.035$

(b) Een schatting voor $E_3(5.1)$ is $0<E_3(5.1)<\frac{2}{4!}.10^{-4}=\frac{1}{12}.10^{-4}$.

Opgave 4.

$f(x)=x^2\sqrt{x}=x^{2.5} \;\to\; f'(x)=2.5x^{1.5} \;\to\; f''(x)=(2.5)(1.5)x^{0.5} \;\to f^{(3)}(x)=\frac{15}{4}x^{-0.5}$

$x=4$ substitueren $f(4)=32$, $f'(4)=20$, $f''(4)=7.5$ en $f^{(3)}(4)=\frac{15}{16}$.

Dus $p_3(x)=32+20(x-4)+\frac{15}{4}(x-4)^2+\frac{5}{32}(x-4)^3$

Natuurlijk is $y=32+20(x-4)$ de vergelijking van de raaklijn.

Opgave 5.

$x^2y+xy^2=6$ differentieren naar x (Beschouw y als een functie van x)

$2xy+x^2y'+y^2+2xyy'=$

0 Substitueren we voor $(x,y)=(2,1)$ dan vinden we $4+4y'+1+4y'=0$.

$\to y'(2)=-\frac{5}{8}$. De raaklijn heeft dan de vergelijking $y-1=$

$-\frac{5}{8}(x-2)$ ofwel $y=-\frac{5}{8}x+\frac{9}{4}$

Opgave 6.

Tan $(\theta) = -\frac{2}{3} \;\rightarrow\; \sin(\theta) =$

$-\frac{2}{3}\cos(\theta) \;\rightarrow\; \frac{4}{9}\cos^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1 \;\rightarrow\; \cos(\theta) = \frac{3}{\sqrt{13}} \quad \left(\text{N.B. } \theta \in \left(-\frac{1}{2}\pi, 0\right)\right).$

Dan is $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1 = \frac{5}{13}$

opgave 7.

Gebruik de middelwaardestelling : $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ **met c tussen a en b. Dus** $3 \le a < c \le b < 5.$

Nemen we $f(x) = \ln x$ **dan is** $f'(x) = \frac{1}{x}$

We zien nu met $a < c < b$ **dat :** $\frac{\ln b - \ln a}{b - a} =$

$\frac{1}{c} \;\rightarrow\; \frac{1}{5} < \frac{\ln b - \ln a}{b - a} < \frac{1}{3} \;\rightarrow\; \frac{b - a}{5} < \ln\left(\frac{b}{a}\right) < \frac{b - a}{3}.$

Opgave 8.

$f(x) = \arcsin(x) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ **Raaklijn heeft de R.C. =**

$2 \;\rightarrow\; \frac{1}{1 - x^2} = 4 \;\rightarrow\; 4 - 4x^2 = 1 \;\rightarrow\; x = \frac{1}{2}\sqrt{3} \bigvee x = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

Verder is $\arcsin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3}$ **en** $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3}$

Raaklijnen hebben dan de vergelijkingen : $y - \frac{\pi}{3} = 2\left(x - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ **en** $y + \frac{\pi}{3} = 2\left(x + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$

Opgave 9.

(a) $\lim_{x \uparrow 5} \frac{|x - 5|}{2x - 10} = \lim_{x \uparrow 5} \frac{-(x - 5)}{2(x - 5)} = -\frac{1}{2}.$

(b) $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 + 5x^2 - 6}{x - 1} =$ (**staartdeling**) $= \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)\left(x^2 + 6x + 6\right)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \left(\left(x^2 + 6x + 6\right) = 13.\right.$

Opgave 10.

(a) $\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \cos(2t)\, dt = \left[\frac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^{\frac{1}{4}\pi} = \frac{1}{2}.$

(b) **gemiddelde waarde is** $\bar{f} = \frac{1}{2} : \frac{\pi}{4} = \frac{2}{\pi}.$

Opgave 11.

$$\int x\, e^{4x}\, dx = \frac{1}{4} x\, e^{4x} - \int \frac{1}{4} e^{4x}\, dx = \frac{1}{4} x\, e^{4x} - \frac{1}{16} e^{4x} + C.$$

Opgave 12.

$$F(x) = \int_0^{2x} (t-1)^3 e^{t^2}\, dt \to F'(x) = 2(2x-1)^3 e^{4x^2}.$$

$$F'(x) = 0 \to x = \frac{1}{2}.$$

Opgave 13.

$$\int \frac{x}{\cos^2(x)}\, dx = x\tan(x) - \int \tan(x)\, dx = x\tan(x) + \ln|\cos(x)| + C.$$

Opgave 14.

$$\int_1^3 \frac{1}{2\sqrt{x}\,(x+1)}\, dx =$$

$$\left(u = \sqrt{x} \to \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \quad = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{u^2+1}\, du = \arctan(u)\Big|_1^{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\pi - \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{12}\pi.$$