Uitwerkingen : 14 – 4 – 2010 2 DL03

Opgave 1

(a) $f(x) = \dfrac{2x+1}{3x-2} \rightarrow f'(x) = \dfrac{2(3x-2) - 3(2x+1)}{(3x-2)^2} = \dfrac{-7}{(3x-2)^2} < 0$ voor $x \neq \dfrac{2}{3}$

(noemer is positief).

(b) $f(2) = \dfrac{5}{4}$ en $f'(2) = -\dfrac{7}{16} \rightarrow L(x) = \dfrac{5}{4} - \dfrac{7}{16}(x-2)$.

(c) De inverse vinden we uit $x = \dfrac{2y+1}{3y-2}$ ofwel $3xy - 2x = 2y + 1$ ofwel

$3xy - 2y = 2x + 1$ ofwel $y(3x-2) = 2x + 1$ ofwel $y = \dfrac{2x+1}{3x-2}$

We vinden dus dat $f^{-1}(x) = \dfrac{2x+1}{3x-2} = f(x)$.

Opgave 2

$\dfrac{2x-1}{x-3} + \dfrac{x-3}{2x-1} \leq \dfrac{10}{3}$ gelijknamig maken en op 0 herleiden

$$\frac{3(2x-1)^2 + 3(x-3)^2 - 10(x-3)(2x-1)}{3(2x-1)(x-3)} \leq 0 \quad \text{ofwel}$$

$$\frac{-5x^2 + 40x}{3(2x-1)(x-3)} \leq 0 \quad \text{en dus} \quad \frac{-5x(x-8)}{3(2x-1)(x-3)} \leq 0$$

Maken we vervolgens een tekenoverzicht dan vinden we

$$(-\infty, 0] \cup \left(\frac{1}{2}, 3\right) \cup [8, \infty)$$

Opgave 3

(a) $f(x) = (x+1)^{\frac{1}{3}}$ $f'(x) = \dfrac{1}{3}(x+1)^{-\frac{2}{3}}$ $f''(x) = -\dfrac{2}{9}(x+1)^{-\frac{5}{3}}$

$$f^{(3)}(x) = \frac{10}{27}(x+1)^{-\frac{8}{3}} = \frac{10}{27(x+1)^2 \sqrt[3]{(x+1)^2}}$$

$x = 0$ substitueren :

$f(0) = 1$ $f'(0) = \dfrac{1}{3}$ $f''(0) = -\dfrac{2}{9}$

Er geldt $a_k = \dfrac{f^k(0)}{k!}$ en dus $p_2(x) = 1 + \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{9}x^2$

(b) $\sqrt[3]{1.1}$ wordt benaderd met $p_2(0.1) = 1 + \dfrac{1}{30} - \dfrac{1}{900} = \dfrac{929}{900}$ (≈ 1.03222)

(opmerking : met het rekenapparaat vinden we 1.03228)

Voor de afschatting van de fout geldt

$$0 < E_2(0.1) = \frac{f^{(3)}(c)}{3!}(0.1)^3 \leq \frac{10}{27} \cdot \frac{1}{6} \cdot (0.1)^3 \approx 0.00006.$$

Opgave 4

$y^4 - xy + x^4 = 3$ We beschouwen hier y als een functie van x en differentieren we naar x (denk aan produktregel en kettingregel),
dan ontstaat $4y^3.y' - y - xy' + 4x^3 = 0$
Substitueren we hierin $x = 1$ en $y = -1$,
dan vinden we $-4y' + 1 - y' + 4 = 0$ en dus $y'(1) = 1$

De vergelijking van de raaklijn is dan $y + 1 = (x - 1)$ ofwel $y = x - 2$.
De vergelijking van de normaal is dan $y + 1 = -(x - 1)$ ofwel $y = -x$.

Opgave 5

$$\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} + \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} = \frac{(\cos x - \sin x)^2 + (\cos x + \sin x)^2}{(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)} = \frac{2\cos^2 x + 2\sin^2 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{2}{\cos 2x}$$

Opgave 6

Gebruik de middelwaardestelling: $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ met c tussen a en b.

Met $f(x) = \arctan(x)$ en $f'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$

Verder geldt $a = 0$ en $b = x$ en dus $0 < c < x$.

Dus $\frac{\arctan(x) - \arctan(0)}{x} = \frac{1}{1 + c^2} < 1 \rightarrow \arctan(x) < x$ (voor $x > 0$).

Opgave 7

$p(x) = x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 27x - 18$, $p(1) = 0$ en $p(3) = 0$.

Blijkbaar is de veelterm deelbaar door $x - 1$ en door $x - 3$.
En dus ook door $(x - 1)(x - 3) = x^2 - 4x + 3$. Staartdeling maken,
dan vinden we
$x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 27x - 18 = (x^2 + x - 6)(x^2 - 4x + 3) = (x + 3)(x - 2)(x - 3)(x - 1)$

De nulpunten zijn dus $x = 3$, $x = 1$, $x = -3$ en $x = 2$.

Opgave 8

Stellen we $\arctan(p) = \varphi$ dan geldt $\tan(\varphi) = p$ en omdat $p > 0$ vinden we dan $\sin(\varphi) = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}$

en $\cos(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2}}$.

(omdat $p > 0$ geldt ook $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ en kunnen we een rechthoekige driehoek tekenen met $\tan(\varphi) = p$)

Tenslotte is nu $\sin(2\varphi) = 2\sin(\varphi)\cos(\varphi) = \frac{2p}{1 + p^2}$.

Opgave 9

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)\, dx = \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

De gemiddelde functiewaarde $\frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}$

Deze wordt bereikt in de punten met $\sin^2(x) =$
$\frac{1}{2}$ ofwel $\sin(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ $\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\ \text{vervalt}\right)$ Hieruit volgt $x = \frac{\pi}{4}$.

Opgave 10

$$\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}\, dx = \left[\frac{2}{3}\left(x^3+1\right)^{\frac{1}{2}}\right]_0^2 = \frac{2}{3}(3-1) = \frac{4}{3}.$$

Opgave 11

$$F(x) = \int_0^{x^2} \frac{t-7}{t^2+1}\, dt$$

$F'(x) = \frac{x^2-7}{x^4+1}.2x$ Verder is $F'(x) = 0$ als $x = \pm\sqrt{7}$ of als $x = 0$.

Opgave 12

$$\int_0^1 \arctan(x)\, dx = [x.\arctan(x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\, dx$$

$$= \frac{\pi}{4} - \left(\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\right)_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2)$$

Opgave 13

$$\int 2x.\ln^2(x)\, dx =$$

$$x^2.\ln^2(x) - \int x^2.\frac{2\ln(x)}{x}\, dx = x^2.\ln^2(x) - \int 2x.\ln(x)\, dx = x^2.\ln^2(x) - x^2.\ln(x) + \int x\, dx =$$

$$x^2.\ln^2(x) - x^2.\ln(x) + \frac{1}{2}x^2 + C.$$