Uitwerkingen : 3 – 11 – 2010 2 DL03

Opgave 1

$x^2 + y^2 > 4$ en $(x-1)^2 + (y-3)^2 < 10$.

Opgave 2

Voor de linearisatie van f vinden we $L(x) = 9 - 4(x-2)$.

$g(x) = \sqrt{f(x)} \rightarrow$ (kettingregel) $g'(x) = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} \rightarrow g(2) = 3 \wedge g'(2) = -\dfrac{4}{6}$

Voor de linearisatie van g vinden we $L(x) = 3 - \dfrac{2}{3}(x-2)$.

Opgave 3

$\dfrac{2}{x+1} - \dfrac{x}{x+3} \le 2 \rightarrow$

$\dfrac{2(x+3)}{(x+1)(x+3)} - \dfrac{x(x+1)}{(x+1)(x+3)} - \dfrac{2(x+1)(x+3)}{(x+1)(x+3)} \le 0 \rightarrow \dfrac{2x+6-x^2-x-2x^2-8x-6}{(x+1)(x+3)} \le 0 \rightarrow$

$\dfrac{-3x^2-7x}{(x+1)(x+3)} \le 0 \rightarrow$

$\dfrac{-x(3x+7)}{(x+1)(x+3)} \le 0$ Tekenoverzicht maken $\rightarrow$ $x < -3$ of $-\dfrac{7}{3} \le x < -1$ of $x \ge 0$.

Opgave 4

$f(x) =$

$\ln^2(x) \rightarrow f'(x) = \dfrac{2\ln(x)}{x} \rightarrow f''(x) = \dfrac{2 - 2\ln(x)}{x^2} \rightarrow f^{(3)}(x) = \dfrac{-\frac{2}{x}.x^2 - 2x(2 - 2\ln(x))}{x^4}$

Dan is $f(1) = f'(1) = 0$, $f''(1) = 2$ en $f^{(3)}(1) = -6$.

Zo vinden we $p_3(x) = (x-1)^2 - (x-1)^3$.

Ook mogelijk is $\ln(x) = \ln(1 + (x-1)) =$ (zie tabel) $= (x-1) - \dfrac{1}{2}(x-1)^2 + O\left((x-1)^3\right)$

En tenslotte vinden we voor de Taylor reeksontwikkeling van derde orde van $\ln^2(x)$,
$p_3(x) = (x-1)^2 - (x-1)^3$.

Opgave 5

$2x^3 - 3xy + 2y^3 = 3 \rightarrow$ (differentieren naar x) $6x^2 - 3y - 3x.y' + 6y^2 y' = 0$

P $(1, -1)$ substitueren $\rightarrow 6 + 3 - 3y'(1) + 6y'(1) = 0 \rightarrow y'(1) = -3$.
De vergelijking van de raaklijn is dan $y + 1 =$

$-3(x-1)$ en de vergelijking van de normaal $y + 1 = \dfrac{1}{3}(x-1)$.

Opgave 6

Blijkbaar is $x^4 - 5x^3 - 19x^2 + 125x - 150$ deelbaar door $(x-3)(x-5) = x^2 - 8x + 15$.
Uit de staartdeling volgt $x^4 - 5x^3 - 19x^2 + 125x - 150 =$
$\left(x^2 - 8x + 15\right)\left(x^2 + 3x - 10\right) = (x-5)(x-3)(x+5)(x-2)$

Maken we een tekenoverzicht van $f(x)$, dan vinden we $x < -5 \vee 2 < x < 3 \vee x > 5$.

Opgave 7

(a) $\log_3(x) + \log_3(6-x) < 2 \rightarrow$

$\log_3(6x - x^2) < \log_3 9 \rightarrow -x^2 + 6x - 9 < 0 \rightarrow -(x-3)^2 < 0 \rightarrow x \neq 3$

Voorwaarden : $x > 0$ en $x < 6$.

Dus voor $0 < x < 3$ of $3 < x < 6$.

(b) $\log_3(x) . \log_3(6-x) < 0$ Het produkt is 0 voor $x =$ 5 en voor $x = 1$. Voorwaarden : $x > 0$ en $x < 6$.

Maken we een tekenoverzicht dan vinden we $0 < x < 1$ of $5 < x < 6$.

Opgave 8

Neem $f(x) = \sqrt{x}$ dan vinden we met de middelwaardestelling ($a = x$ en $b = x + 2$) dat

$$\frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x}}{2} = \frac{1}{2\sqrt{c}} \quad \text{met } 9 < x < c < x + 2 \quad \rightarrow \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x}}{2} < \frac{1}{6} \rightarrow \sqrt{x+2} - \sqrt{x} < \frac{1}{3}.$$

Opgave 9

$$(f \circ f)(x) = \frac{2.\frac{2x-1}{x-3} - 1}{\frac{2x-1}{x-3} - 3} = \frac{2(2x-1) - (x-3)}{2x - 1 - 3(x-3)} = \frac{3x+1}{-x+8}.$$

De vergelijking van f^{-1} vinden we door y op te lossen uit $\frac{2y-1}{y-3} =$ $x \rightarrow xy - 3x = 2y - 1 \rightarrow y(x-2) = 3x - 1 \rightarrow$

$$f^{-1}(x) = \frac{3x-1}{x-2}.$$

Opgave 10

(a) $\lim_{x \uparrow 5} \frac{x^2 + 10x - 75}{|3x^2 - 75|} =$

$$\lim_{x \uparrow 5} \frac{x^2 + 10x - 75}{-(3x^2 - 75)} = \lim_{x \uparrow 5} \frac{(x+15)(x-5)}{-(3x^2 - 75)} = \lim_{x \uparrow 5} \frac{(x+15)(x-5)}{-3(x-5)(x+5)} = \lim_{x \uparrow 5} \frac{(x+15)}{-3(x+5)} = -\frac{2}{3}.$$

(b) $$\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1}\right) = \lim_{x \to 1} \left(\frac{x+1-2}{(x-1)(x+1)}\right) = \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}.$$

Opgave 11

$$\int_{-1}^{3} \sqrt{2x+3}\, dx = \frac{1}{3} (2x+3)^{\frac{3}{2}} \Big|_{-1}^{3} = 9 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3} \quad \rightarrow \bar{f} = \frac{13}{6}$$

$$\sqrt{2x+3} = \frac{13}{6} \rightarrow 2x + 3 = \frac{169}{36} \rightarrow x = \frac{61}{72}.$$

Opgave 12

$$\int_{1}^{e} \frac{(2\ln(x) + 1)^3}{x} dx = \int_{1}^{3} u^3\, du = \frac{1}{8} u^4 \Big|_{1}^{3} = 10.$$

$$u = 2\ln(x) + 1 \rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{2}{x} \rightarrow \frac{1}{2} du = \frac{1}{x} dx$$

Opgave 13

$$\int \sin^3(x)\,dx = \int \left(1 - \cos^2(x)\right) \sin(x)\,dx = \int -\left(1 - u^2\right) du = \frac{1}{3} u^3 - u + C = \frac{1}{3} \cos^3(x) - \cos(x) + C$$

$$u = \cos(x) \longrightarrow \frac{du}{dx} = -\sin(x) \longrightarrow du = -\sin(x)\,dx$$

Opgave 14

$$\int x^2 \sin(3x)\,dx =$$

$$-\frac{1}{3} x^2 \cos(3x) + \int \frac{2}{3} x \cos(3x)\,dx = -\frac{1}{3} x^2 \cos(3x) + \frac{2}{9} x \sin(3x) - \int \frac{2}{9} \sin(3x)\,dx$$

$f'(x) =$

$\sin(3x) \longrightarrow f(x) = -\frac{1}{3}\cos(3x)$ $\qquad f'(x) = \cos(3x) \longrightarrow f(x) = \frac{1}{3}\sin(3x)$

$g(x) = x^2 \longrightarrow g'(x) = 2x$ $\qquad g(x) = \frac{2}{3}x \longrightarrow g'(x) = \frac{2}{3}$

$$= -\frac{1}{3} x^2 \cos(3x) + \frac{2}{9} x \sin(3x) + \frac{2}{27} \cos(3x) + C.$$