TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Tentamen Basiswiskunde, 2DL03, woensdag 19 januari 2011, 9.00–12.00 uur.

Geef op het eerste vel met uitwerkingen aan welk programma (Schakelprogramma of TU/e-minor) u volgt.

De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden.

U mag géén gebruik maken van laptop, grafische rekenmachine en formulekaart.
U mag géén gebruik maken van het boek en ander schriftelijk of gedrukt materiaal.

---

1. Toon aan dat $x = -2$ en $x = 3$ de enige twee oplossingen zijn van de vergelijking $x^4 + x^3 - 6x^2 - 14x - 12 = 0$.

2. Gegeven is de functie f met $f(x) = 3e^{-x} + 2$.
   (a) Los op $f'(x) = -6$.
   (b) Bepaal de inverse functie f^{-1}.

3. Gegeven is de functie f met $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = x^{-\frac{1}{3}}$.
   Geef de antwoorden zonder gebruik van een calculator.
   (a) Bepaal de linearisatie van f om $x = 1$.
   (b) Bepaal een benadering van $(1.1)^{-\frac{1}{3}}$ door gebruik te maken van deze linearisatie.
   (c) Is $(1.1)^{-\frac{1}{3}}$ groter of kleiner dan de benadering uit onderdeel (b)?
   Geef een schatting van de error E(1.1).

4. (a) Bepaal het Taylor polynoom van de derde orde om $x = \pi$ van $f(x) = \sin(x)$.
   (b) Bepaal het Taylor polynoom van de derde orde om $x = 0$ van $g(x) = \frac{1}{2x+4}$.

5. Beschouw de kromme k die bepaald wordt door de vergelijking $2\sqrt{y} + y - 2x - 3 = 0$.
   Bepaal de vergelijking van de raaklijn aan de kromme in het punt P(0,1).

6. Gegeven is dat $\theta = \arctan(\frac{5}{12})$.
   Bereken $\sin(\theta)$ en $\sin(2\theta)$.

zie volgende pagina

7. Los de volgende ongelijkheid op $\log_3(x-5)+\log_3(20-x) \leq \log_3 2 + 2\log_3 5$.

8. Toon aan dat $\arctan(x) - \arctan(2) < \frac{1}{5}(x-2)$ voor alle $x > 2$.
   Gebruik de middelwaardestelling!

9. Gegeven zijn de functies f en g bepaald door $f(x) = -2x + 12$ and $g(x) = 2\sqrt{x}$.
   Toon aan dat de grafieken van f en g elkaar loodrecht snijden.

10. (a) Gegeven is $f(x) = \int_0^{x^2} \sqrt{t^3+1}\,\mathrm{d}t$. Bepaal $f'(x)$.
    (b) Gegeven is $g(x) = \sin^2(x\sqrt{x})$. Bepaal $g'(x)$.

11. (a) Bereken $\displaystyle\int_0^3 |x^2-4|\ \mathrm{d}x$.
    (b) Wat is de gemiddelde waarde van $f(x) = |x^2-4|$ op het interval [0,3]?
    Bepaal ook de punte(n) waar deze gemiddelde waarde wordt aangenomen.

12. Bepaal $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

13. Bepaal $\displaystyle\int x^3\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

14. Bereken $\displaystyle\int_{-2}^{2} \arctan(\frac{x}{2})\,\mathrm{d}x$.

zie volgende pagina

Tentamen Basiswiskunde, 2DL03, woensdag 19 januari 2011, 9.00–12.00 uur

---

Voor de opgaven kunnen de volgende aantallen punten worden behaald:

Opgave	1:	4	punten	Opgave	5:	4	punten	Opgave	11b:	2	punten
Opgave	2a:	2	punten	Opgave	6:	4	punten	Opgave	12:	4	punten
Opgave	2b:	3	punten	Opgave	7:	4	punten	Opgave	13:	4	punten
Opgave	3a:	2	punten	Opgave	8:	4	punten	Opgave	14:	4	punten
Opgave	3b:	1	punten	Opgave	9:	4	punten				
Opgave	3c:	2	punten	Opgave	10a:	2	punten				
Opgave	4a:	2	punten	Opgave	10b:	2	punten				
Opgave	4b:	3	punten	Opgave	11a:	3	punten				

Het cijfer voor het tentamen wordt bepaald door het totaal der behaalde punten door 6 te delen en tot een geheel getal af te ronden.

Integratietabel

$g(x)$	$\int g(x)\mathrm{d}x$
$x^n, n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert)$
$\frac{f'(x)}{f(x)}$	$\ln(\lvert f(x)\rvert)$
e^x	e^x
$a^x, a > 0, a \neq 1$	$\frac{a^x}{\ln(a)}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\frac{1}{\sin^2(x)}$	$-\cot(x)$
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$
$\tan(x)$	$-\ln(\lvert\cos(x)\rvert)$
$\frac{1}{\sin(x)}$	$\ln(\lvert\tan(\frac{x}{2})\rvert)$
$\frac{1}{\cos(x)}$	$\ln(\lvert\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})\rvert)$
$e^{ax}\sin(bx), a^2+b^2>0$	$\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\,(a\sin(bx)-b\cos(bx))$
$e^{ax}\cos(bx), a^2+b^2>0$	$\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\,(a\cos(bx)+b\sin(bx))$
$\frac{1}{a^2+x^2}, a>0$	$\frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a})$
$\frac{1}{a^2-x^2}, a>0$	$\frac{1}{2a}\ln(\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert)$
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}, a>0$	$\arcsin(\frac{x}{a})$
$\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}, a>0$	$\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}, a>0$	$\ln(\left\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\right\rvert)$
$\sqrt{a^2-x^2}, a>0$	$\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin(\frac{x}{a})$
$\sqrt{a^2+x^2}, a>0$	$\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$
$\sqrt{x^2-a^2}, a>0$	$\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}+\frac{a^2}{2}\ln(\left\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\right\rvert)$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
$\tanh(x)$	$\ln(\cosh(x))$

Opmerkingen

De parameters in de tabel zijn reële getallen.

De integratieconstanten zijn weggelaten.

Taylorpolynomen

Functie	Taylorpolynoom plus grote-O-term
e^x	$1 + x + \frac{1}{2}\,x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\,x^n + O(x^{n+1})$
$\cos(x)$	$1 - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{24}\,x^4 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2\,n)!}\,x^{2\,n} + O(x^{2\,n+1})$
$\sin(x)$	$x - \frac{1}{6}\,x^3 + \frac{1}{120}\,x^5 + \cdots + \frac{(-1)^n\,x^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} + O(x^{2\,n+2})$
$\frac{1}{1+x}$	$1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n\,x^n + O(x^{n+1})$
$\ln(1+x)$	$x - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{3}\,x^3 + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}\,x^{n+1} + O(x^{n+2})$
$\frac{1}{1+x^2}$	$1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n\,x^{2\,n} + O(x^{2\,n+1})$
$\arctan(x)$	$x - \frac{1}{3}\,x^3 + \frac{1}{5}\,x^5 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2\,n+1)}\,x^{2\,n+1} + O(x^{2\,n+2})$
$(1+x)^\alpha$	$1 + \binom{\alpha}{1}\,x + \binom{\alpha}{2}\,x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n}\,x^n + O(x^{n+1})$

- Alle Taylorpolynomen zijn polynomen rond het punt 0.
- De binomiaalcoëfficiënten worden gedefinieerd door

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot (\alpha-2) \cdots (\alpha-(k-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k}\ ,\ k = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\binom{\alpha}{0} = 1$$