TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Tentamen Basiswiskunde, 2DL03, woensdag 2 november 2011, 9.00–12.00 uur.

Geef op het eerste vel met uitwerkingen aan welk programma (Schakelprogramma of TU/e-minor) u volgt.

De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden.

U mag géén gebruik maken van laptop, grafische rekenmachine en formulekaart.
U mag géén gebruik maken van het boek en ander schriftelijk of gedrukt materiaal.

---

1. Los de volgende ongelijkheid op $\frac{2x+1}{3x+2} + \frac{3x+2}{2x+1} \leq \frac{5}{2}$.

2. Beschouw de volgende twee cirkels bepaald door de vergelijkingen
$x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$ en $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$.
   (a) Bepaal de middelpunten en de stralen.
   (b) Bepaal het gebied gedefinieerd door de volgende ongelijkheden
   $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 \leq 0$, $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 \leq 0$ en $y \leq x$.

3. Bewijs dat $(\cos^4(x) - \sin^4(x))\tan(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$.

4. (a) Bepaal het Taylor polynoom van de vierde orde om $x = 0$ van $f(x) = \cos^2(x)$.
   (b) Bepaal het Taylor polynoom van de vierde orde om $x = 0$ van $g(x) = \frac{1}{x+2}$.

5. Beschouw de kromme k gegeven door de vergelijking $(y^3 + x^2)^2 = 4xy$.
Bepaal de vergelijking van de raaklijn aan de kromme in het punt P(1,1).

6. Bepaal de volgende limieten:
   (a) $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^3 + 6x^2 - 8x - 16}{3x - 6}$.
   (b) $\lim_{x \uparrow 5} \dfrac{|x^2 - 25|}{2x^2 - 10x}$.

zie volgende pagina

7. Gegeven is dat $\phi = \arccos(-\frac{1}{3})$.
   Bereken $\sin(\phi)$, $\sin(\frac{3\pi}{2} - \phi)$ en $\cos(2\phi)$.
   Geef de antwoorden zonder gebruik te maken van een calculator.

8. Toon aan dat $x < e^x - 1 < 2x$ voor alle x met $0 < x < \ln 2$.
   Pas de Middelwaardestelling toe.

9. Beschouw een differentieerbare functie f met $f(5) = 1$ en $f'(5) = 3$.

   (a) Bepaal de linearisatie van f om $x = 5$.

   (b) Gebruik deze linearisatie voor een schatting van $f(5.1)$ en bepaal een schatting voor de de error $E(5.1)$, indien gegeven is dat $0 < f''(x) \leq 2$ op het interval $[5,\ 5.1]$.

   (c) Bepaal ook de linearisatie van g met $g(x) = x\sqrt{f(x) + 3}$ om $x = 5$.

10. (a) Gegeven is $f(x) = \int_{-x^2}^{x^2} \frac{t^2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$. Bepaal en vereenvoudig $f'(x)$.

    (b) Gegeven is $g(x) = \ln^2(x^2\sqrt{x} + 1)$. Bepaal $g'(x)$.

11. (a) Bereken $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$.

    (b) Wat is de gemiddelde waarde van $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ op het interval [0,3]?
    Bepaal het punt waarin deze gemiddelde waarde wordt aangenomen.

12. Bepaal $\displaystyle\int \frac{\sin(x)\cos(x)}{1 + \sin^2(x)}\mathrm{d}x$.

13. Bepaal $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{x+2}}\,\mathrm{d}x$.

14. Bepaal $\displaystyle\int \sqrt{x}\cos(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x$.

zie volgende pagina

Tentamen Basiswiskunde, 2DL03, woensdag 2 november 2011, 9.00–12.00 uur

---

Voor de opgaven kunnen de volgende aantallen punten worden behaald:

Opgave	1:	4	punten	Opgave	6b:	2	punten	Opgave	11a:	2	punten
Opgave	2a:	2	punten	Opgave	7:	3	punten	Opgave	11b:	2	punten
Opgave	2b:	2	punten	Opgave	8:	4	punten	Opgave	12:	4	punten
Opgave	3:	3	punten	Opgave	9a:	1	punten	Opgave	13:	4	punten
Opgave	4a:	3	punten	Opgave	9b:	2	punten	Opgave	14:	5	punten
Opgave	4b:	3	punten	Opgave	9c:	2	punten				
Opgave	5:	4	punten	Opgave	10a:	3	punten				
Opgave	6a:	3	punten	Opgave	10b:	2	punten				

Het cijfer voor het tentamen wordt bepaald door het totaal der behaalde punten door 6 te delen en tot een geheel getal af te ronden.

Integratietabel

$g(x)$	$\int g(x)\mathrm{d}x$
$x^n, n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert)$
$\frac{f'(x)}{f(x)}$	$\ln(\lvert f(x)\rvert)$
e^x	e^x
$a^x, a > 0, a \neq 1$	$\frac{a^x}{\ln(a)}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\frac{1}{\sin^2(x)}$	$-\cot(x)$
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$
$\tan(x)$	$-\ln(\lvert\cos(x)\rvert)$
$\frac{1}{\sin(x)}$	$\ln(\lvert\tan(\frac{x}{2})\rvert)$
$\frac{1}{\cos(x)}$	$\ln(\lvert\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})\rvert)$
$e^{ax}\sin(bx), a^2+b^2>0$	$\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\,(a\sin(bx)-b\cos(bx))$
$e^{ax}\cos(bx), a^2+b^2>0$	$\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\,(a\cos(bx)+b\sin(bx))$
$\frac{1}{a^2+x^2}, a>0$	$\frac{1}{a}\,\arctan(\frac{x}{a})$
$\frac{1}{a^2-x^2}, a>0$	$\frac{1}{2a}\,\ln(\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert)$
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}, a>0$	$\arcsin(\frac{x}{a})$
$\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}, a>0$	$\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}, a>0$	$\ln(\left\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\right\rvert)$
$\sqrt{a^2-x^2}, a>0$	$\frac{x}{2}\,\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\,\arcsin(\frac{x}{a})$
$\sqrt{a^2+x^2}, a>0$	$\frac{x}{2}\,\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\,\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$
$\sqrt{x^2-a^2}, a>0$	$\frac{x}{2}\,\sqrt{x^2-a^2}+\frac{a^2}{2}\,\ln(\left\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\right\rvert)$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
$\tanh(x)$	$\ln(\cosh(x))$

Opmerkingen

De parameters in de tabel zijn reële getallen.
De integratieconstanten zijn weggelaten.

Taylorpolynomen

Functie	Taylorpolynoom plus grote-O-term
e^x	$1 + x + \frac{1}{2}\,x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\,x^n + O(x^{n+1})$
$\cos(x)$	$1 - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{24}\,x^4 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2\,n)!}\,x^{2\,n} + O(x^{2\,n+1})$
$\sin(x)$	$x - \frac{1}{6}\,x^3 + \frac{1}{120}\,x^5 + \cdots + \frac{(-1)^n\,x^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} + O(x^{2\,n+2})$
$\frac{1}{1+x}$	$1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n\,x^n + O(x^{n+1})$
$\ln(1+x)$	$x - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{3}\,x^3 + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}\,x^{n+1} + O(x^{n+2})$
$\frac{1}{1+x^2}$	$1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n\,x^{2\,n} + O(x^{2\,n+1})$
$\arctan(x)$	$x - \frac{1}{3}\,x^3 + \frac{1}{5}\,x^5 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2\,n+1)}\,x^{2\,n+1} + O(x^{2\,n+2})$
$(1+x)^\alpha$	$1 + \binom{\alpha}{1}\,x + \binom{\alpha}{2}\,x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n}\,x^n + O(x^{n+1})$

- Alle Taylorpolynomen zijn polynomen rond het punt 0.
- De binomiaalcoëfficiënten worden gedefinieerd door

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot (\alpha-2) \cdots (\alpha-(k-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k}\ ,\ k = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\binom{\alpha}{0} = 1$$