Is $A < B$?

Fokko van de Bult

June 2, 2004

1 Inleiding

Ongelijkheden komen op de IMO in verschillende vormen voor. De opvallendste vorm is opgaves die zelf een ongelijkheid zijn. Deze opgaves vereisen (bijna) altijd nog een aantal ingenieuze stappen, die verder gaan dan wat als standaardmethodes hier beschreven wordt. Verder zijn er ook regelmatig meetkundige ongelijkheden op IMO's, dat zijn opgaves waarin een ongelijkheid moet worden bepaalt tussen meetkundige waardes (bijvoorbeeld lengtes of oppervlaktes). De oplossing van dit soort opgaves vereist kennis van meetkunde, maar ook van ongelijkheden, al is dat stuk meestal natuurlijk wel makkelijker dan een opgave die alleen maar een ongelijkheid is. Ten slotte zijn er nog een heleboel opgaves waarin wel iets van een ongelijkheid gebruikt kan worden om iets te bewijzen, bijvoorbeeld om een afschatting te maken in een getaltheorie opgave. De ongelijkheden die dan nodig zijn kunnen echt van een standaard type zijn, maar om dat te herkennen zul je die standaard ongelijkheden wel moeten kennen.

Bij het bewijzen van ongelijkheden moet je altijd een paar dingen in het oog houden. Ten eerste is het van belang om in de gaten te houden voor welke waarden van de parameter de ongelijkheid moet gelden (zijn het positieve getallen, of mag alles?). Ten tweede is het altijd goed om te bedenken of en wanneer gelijkheid in de ongelijkheid optreedt. Dit kan hints geven over wat voor soort afschattingen gebruikt kunnen worden om de opgave op te lossen. (Als je weet dat er gelijkheid optreedt als $x = 1$, dan moet dat ook zo zijn in elke afschatting die je gebruikt). Ten derde kun je je zeer snel vergissen in een teken van de ongelijkheid en daardoor een fout bewijs leveren, terwijl het ongelooflijk lastig is om de fout te vinden. Bij twijfel kun je altijd simpelweg een paar waardes voor de parameter invullen en alles voor die waardes narekenen. Als je dan een fout hebt gemaakt, of ergens een te grote afschatting kun je dat dan makkelijk zien.

Bijna alle ongelijkheden die je zult tegenkomen kunnen op verschillende manieren worden bewezen. De meeste belangrijke ongelijkheden in dit stuk kunnen bijvoorbeeld ook uit elkaar worden afgeleid. Echter, bij veel opgaves zijn bepaalde methodes wel eenvoudiger en korter dan andere. Het is dan ook belangrijk om met alle methodes te oefenen. Ook kun je je na het oplossen van een ongelijkheid afvragen of je het ook op een andere manier nog kan oplossen (zolang je dat maar niet doet op de IMO zelf), om zo met alle methodes ervaring te krijgen.

2 De basis

De belangrijkste ongelijkheid die er is is

$$x^2 \geq 0. \tag{1}$$

Deze ongelijkheid geldt voor alle reële x en gelijkheid geldt alleen als $x = 0$. We gaan deze ongelijkheid hier niet bewijzen, maar met behulp van deze ongelijkheid en een paar regels om ongelijkheden te manipuleren kun je al heel veel ongelijkheden bewijzen. De meeste van deze regels ken je waarschijnlijk al, maar ter herinnering noem ik hier nog de belangrijkste.

Als een ongelijkheid geldt dan mag je aan beide kanten een zelfde getal optellen en dan blijft de ongelijkheid gelden. Ook mag je links en rechts met een positief getal vermenigvuldigen (natuurlijk ook met een uitdrukking waarvan je weet dat die positief is). Als je met een negatieve constante vermenigvuldigt dan klapt het teken van de ongelijkheid om. Als je weet dat er links en rechts een niet-negatief getal staat dan mag je ook aan beide kanten kwadrateren.

Deze regels om ongelijkheden te manipuleren komen eigenlijk allemaal op hetzelfde neer, we voeren namelijk steeds op beide kanten van een ongelijkheid een stijgende functie uit (bv. bij het optellen van een constante de functie $f(x) = x + c$.) Door dit te doen blijft de ongelijkheid geldig. In het geval van een dalende functie klapt het teken van de ongelijkheid om. Als de functie strikt stijgend is (dit betekent dat $f(x) > f(y)$ als $x > y$, terwijl we anders slechts weten dat $f(x) \geq f(y)$ als $x > y$) dan veranderen de waarden waarin gelijkheid optreedt niet. Andere functies die soms nuttig zijn om uit te voeren zijn bijvoorbeeld e^x of $\log(x)$ (deze zijn vooral handig om van sommen producten te maken of andersom).

Ook mag je dingen doen als twee ongelijkheden bij elkaar optellen of met elkaar vermenigvuldigen (dit laatste alleen als alle vier de termen positief zijn!).

Voorbeeld 2.1 Voor twee niet-negatieve getallen a en b bekijken we de ongelijkheid $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$. Uitwerken geeft dat $a + b - 2\sqrt{ab} \geq 0$. Het links en rechts optellen van $2\sqrt{ab}$ en delen door 2 geeft vervolgens de volgende, belangrijke ongelijkheid

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}. \tag{2}$$

Ga zelf na dat gelijkheid alleen optreedt als $a = b$.

In dit voorbeeld zijn we van bekende ongelijkheden naar een onbekende gelijkheid gegaan. In de praktijk zul je (bijna altijd) de onbekende ongelijkheid krijgen en gevraagd worden die te bewijzen. In zo'n geval is het lastig in te zien wat een goede ongelijkheid is om mee te beginnen. Daarom kun je vaak beter van achter naar voren werken op je kladpapier. Overigens mag je dan dezelfde manipulaties op ongelijkheden toepassen want strikt stijgende functies hebben een strikt stijgende inverse. Als je bijvoorbeeld van achter naar voren werkend kwadrateert zul je van voor naar achter juist wortel trekken, wat ook een stijgende functie is. Maak echter altijd voor jezelf duidelijk dat je de ongelijkheden die je dan opschrijft nog niet bewezen hebt maar juist moet bewijzen, anders is het makkelijk om jezelf voor de gek te houden. Verder is het een stuk fraaier om bij de nette oplossing wel van bekend naar onbekend te werken.

Hier alvast een paar opgaves om mee te oefenen.

Opgave 2.1 Bewijs dat voor alle positieve x geldt dat

$$x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

Opgave 2.2 Bewijs dat voor alle reële getallen x en y geldt dat

$$x^2 + y^2 \geq 2xy.$$

Opgave 2.3 Bewijs dat voor alle niet-negatieve getallen a, b en c geldt dat

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc.$$

Opgave 2.4 Voor welke x is $f(x) = (a + bx^4)/x^2$ minimaal (a en b positief, verboden te differentiëren!)?

Opgave 2.5 Zij $a, b > 0$ en $m \in N$. Toon aan dat

$$(1 + \frac{a}{b})^m + (1 + \frac{b}{a})^m \geq 2^{m+1}.$$

Opgave 2.6 Bewijs voor alle reële a en b dat

$$a^2 + 2ab + 4b^2 \geq 0.$$

Opgave 2.7 Bewijs dat voor elke reëel getal a geldt

$$4a^4 - 4a^3 + 5a^2 - 4a + 1 \geq 0.$$

Opgave 2.8 Bewijs dat als a, b en c positieve getallen zijn met $a < b$ geldt dat

$$\frac{a+c}{b+c} > \frac{a}{b}.$$

Opgave 2.9 Als a, b en c positieve getallen zijn zodat $a + b + c = 1$. Dan geldt

$$ab + bc + ca \leq \frac{1}{3}.$$

Opgave 2.10 Toon aan dat voor $a, b, c > 0$ de volgende ongelijkheden nooit alledrie tegelijkertijd kunnen gelden

$$a(1-b) > \frac{1}{4},\ b(1-c) > \frac{1}{4} \text{ en } c(1-a) > \frac{1}{4}.$$

Opgave 2.11 Laat $x_1, x_2, \ldots, x_n$ reële getallen zijn die voldoen aan

1. $-1/\sqrt{3} \leq x_i \leq \sqrt{3}$ voor alle $i \in \{1, 2, \ldots, 1997\}$;
2. $x_1 + x_2 + \cdots + x_1 997 = -318\sqrt{3}$.

Bepaal het maximum van $x_1^{12} + x_2^{12} + \cdots + x_{1997}^{12}$.

Opgave 2.12 Laat $a_1, a_2, \ldots, a_n$ een rij niet-negatieve getallen zijn zodat

$$a_{n+m} \leq a_n + a_m$$

geldt voor alle $n, m \in N$. Bewijs dat voor alle $n \geq m$

$$a_n \leq ma_1 + \left(\frac{n}{m} - 1\right) a_m.$$

Opgave 2.13 (Azie en Pacifisch gebied 1997) Zij

$$S = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{3}} + \frac{1}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} + \cdots + \frac{1}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{1993006}},$$

waar de tellers partiële sommen van de rij van driehoeksgetallen vormen. Bewijs dat $S > 1001$.

Opgave 2.14 (India 1998) Laat a, b en c reële getallen zijn en definieer

$$X = a + b + c + 2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca}.$$

Bewijs dat $X \geq \max 3a, 3b, 3c$ en dat een van de drie getallen

$$\sqrt{X - 3a}, \qquad \sqrt{X - 3b}, \qquad \sqrt{X - 3c},$$

de som van de twee andere is.

En nog een paar lastige:

Opgave 2.15 (IMO 1971) n is een positief geheel getal groter dan twee. Bewijs dat de volgende ongelijkheid dan en slechts dan geldt voor alle mogelijke n-tallen reële getallen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ als $n = 3$ of $n = 5$:

$$\sum_{i=1}^{n} \prod_{j \neq i} (a_i - a_j) \geq 0.$$

Opgave 2.16 (IMO 1974) a, b, c en d zijn willekeurige reële getallen. Bepaal de verzameling van alle waarden die de som

$$S = \frac{a}{a+b+d} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{a+c+d}$$

kan aannemen.

Opgave 2.17 (IMO 1975) Laat $x_1, \ldots, x_n$ en $y_1, \ldots, y_n$ twee niet-stijgende rijen reële getallen zijn. Laat $z_1, z_2, \ldots, z_n$ een permutatie zijn van $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Bewijs dat

$$\sum_{i=0}^{n} (x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=0}^{n} (x_i - z_i)^2.$$

3 Gemiddelden

3.1 Rekenkundig en meetkundig gemiddelde

Een gemiddelde is hier niet zo maar de som van n getallen gedeeld door n, maar een (symmetrische) functie van n getallen. Er zijn nog wel een paar eisen die je aan een gemiddelde wil stellen (zoals dat hij stijgend is en dat de functiewaarde van $(c, c, \ldots, c)$ gelijk is aan c etc.) maar aangezien we geen algemene dingen over gemiddeldes gaan bewijzen hoeven we ook niet precies te definiëren wat een gemiddelde is. Bovendien zijn niet over alle gemiddeldes makkelijk ongelijkheden te bewijzen.

De belangrijkste twee waar dat wel mee kan zijn het rekenkundig en het meetkundig gemiddelde. Het rekenkundig gemiddelde R is het "gewone" gemiddelde dat jullie allemaal wel kennen, namelijk

$$R := \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}. \tag{3}$$

Het meetkundig gemiddelde M is gedefinieerd als

$$M := \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \tag{4}$$

voor niet-negatieve x_i (wortels trekken uit negatieve getallen gaat namelijk niet zo goed en je wilt ook niet dat het meetkundig gemiddelde van -4 en -4 gelijk is aan $\sqrt{16} = 4$).

Er geldt nu de volgende, belangrijke ongelijkheid, de ongelijkheid van het rekenkundig en meetkundig gemiddelde.

Stelling 3.1 *Voor alle waarde van $x_i \geq 0$ en alle $n > 0$ geldt*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}. \tag{5}$$

Merk op dat (2) precies deze ongelijkheid is voor $n = 2$. Er zijn heel veel bewijzen voor deze ongelijkheid en als illustratie van verschillende technieken zullen we er dan ook steeds weer op terugkomen. Hier volgt een bewijs met behulp van inductie.

Bewijs: We gaan (5) bewijzen voor alle $n > 0$ met behulp van inductie. Voor $n = 1$ is de vergelijking $x_1 \geq x_1$ en dit is triviaal waar. Stel dus dat de ongelijkheid geldt voor $n = m - 1$. We willen de ongelijkheid nu bewijzen voor de m niet-negatieve getallen $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Als één van die getallen 0 is dan is de ongelijkheid triviaal waar (iets niet-negatiefs is groter dan 0) en dus kunnen we zonder verlies van algemeenheid aannemen dat het meetkundig gemiddelde van x_1 t/m x_m gelijk is aan 1 (vermenigvuldig anders alle x_i met dezelfde constante). Als alle x_i gelijk zijn aan 1 dan geldt overduidelijk gelijkheid in (5), dus we mogen ook aannemen dat niet alle x_i gelijk zijn. Dan is er minstens één x_i strikt kleiner dan 1 en een andere strikt groter dan 1. Noem die (door eventueel verwisselen van een paar getallen) x_1 en x_2. Dan geldt dat $(1 - x_1)(1 - x_2) < 0$, ofwel dat

$$1 + x_1 x_2 < x_1 + x_2.$$

Met behulp van deze ongelijkheid en de inductiehypothese zien we dat

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_m}{m} > \frac{1 + x_1x_2 + \cdots + x_m}{m} \geq \frac{1 + (m-1)\sqrt[m-1]{(x_1x_2)x_3\cdots x_m}}{m} = 1$$

geldt en dus dat de ongelijkheid (5) ook geldt voor $n = m$ (we hadden namelijk aangenomen dat het meetkundig gemiddelde 1 was). ◇

Opgave 3.1 Toon aan dat voor $a, b, c > 0$ geldt

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc.$$

Opgave 3.2 Toon aan dat voor $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ met $a_1a_2\cdots a_n = 1$ geldt

$$(a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_n+1) \geq 2^n.$$

Opgave 3.3 Bewijs dat voor alle positieve reële a,b en c geldt

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$$

Opgave 3.4 Laat $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$. Toon aan dat

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_n}{a_1} \geq n.$$

Opgave 3.5 Zij $a, b > 0$ en $ab = 1$. Bewijs dat

$$(1+a)(1+b) \geq 4.$$

Opgave 3.6 Zij x een reëel getal. Bewijs (zonder differentiëren) dat

$$\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2.$$

Opgave 3.7 Voor a, b, c en d, positieve getallen, bewijs dat

$$\sqrt{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}.$$

Opgave 3.8 Vind alle drietallen reële getallen x, y en z, die voldoen aan

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + \frac{z^2}{x^2} = 3, \text{ en } x + y + z = 3.$$

Opgave 3.9 Toon aan dat voor alle $n \in N$ geldt

$$(n+1)^n \geq 2^n n!.$$

Opgave 3.10 (IMO 1969) Bewijs voor $x_1, x_2 > 0$ en $x_1y_1 > z_1^2$ en $x_2y_2 > z_2^2$ de ongelijkheid

$$\frac{8}{(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2} \leq \frac{1}{x_1y_1 - z_1^2} + \frac{1}{x_2y_2 - z_2^2}.$$

Wanneer geldt het gelijkteken?

Opgave 3.11 (Oostenrijk-Polen 1997) 1. Bewijs dat voor alle $p, q \in R$ geldt $p^2 + q^2 + 1 > p(q+1)$;

2. Bepaal het grootste reële getal b zodanig dat $p^2 + q^2 + 1 > bp(q+1)$, voor alle $p, q \in R$.

3. Bepaal het grootste reële getal b zodanig dat $p^2 + q^2 + 1 > bp(q+1)$, voor alle $p, q \in ZR$.

Opgave 3.12 (Sint Petersburg 1997) Bewijs dat voor alle $x, y, z \geq 2$ geldt

$$(y^3 + x)(z^3 + y)(x^3 + z) \geq 125xyz.$$

Opgave 3.13 (China 1998) Zij $n \geq 2$ een positief geheel getal. Zij $x_1, x_2, \ldots, x_n$ reële getallen zodat

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} = 1.$$

Bepaal voor elk geheel getal k, $1 \leq k \leq n$ de maximale waarde van $|x_k|$.

Opgave 3.14 (Ierland 1998) Laat zien dat als $x \neq 0$ een reëel getal is dat dan geldt

$$x^8 - x^5 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^4} \geq 0.$$

3.2 Andere gemiddelden

Behalve het rekenkundig en het meetkundig gemiddelde zijn er nog meer gemiddelden die nuttig kunnen zijn bij het bewijzen van ongelijkheden.

Het harmonisch gemiddelde is gedefinieerd voor $x_i > 0$ door

$$H := \frac{n}{1/x_1 + 1/x_2 + \cdots + 1/x_n}. \tag{6}$$

Nu geldt de volgende ongelijkheid voor alle $n > 0$ en alle $x_i > 0$

$$\frac{n}{1/x_1 + 1/x_2 + \cdots + 1/x_n} \leq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}. \tag{7}$$

Bewijs: Het bewijs van (7) is verbazingwekkend simpel als je de ongelijkheid van het rekenkundig en meetkundig gemiddelde (5) al weet. Er geldt namelijk

$$R(x_1^{-1}, x_2^{-1}, \ldots, x_n^{-1}) = H(x_1, x_2, \ldots, x_n)^{-1}$$

en

$$M(x_1^{-1}, x_2^{-1}, \ldots, x_n^{-1}) = M(x_1, x_2, \ldots, x_n)^{-1}.$$

Doordat alle x_i in (7) positief zijn de $1/x_i$'s dat ook en mogen we ze dus in vullen in de ongelijkheid van het rekenkundig en meetkundig gemiddelde (5), zodat

$$H(x_1, x_2, \ldots, x_n)^{-1} = R(x_1^{-1}, x_2^{-1}, \ldots, x_n^{-1}) \geq M(x_1^{-1}, x_2^{-1}, \ldots, x_n^{-1}) = M(x_1, x_2, \ldots, x_n)^{-1}$$

geldt. Door aan beide kanten de functie $f(x) = 1/x$ toe te passen klapt het teken om en verkrijgen we de gewenste ongelijkheid (7). $\diamond$

Het laatste gemiddelde met een speciale naam dat we zullen noemen is het kwadratisch gemiddelde dat gedefinieerd wordt als

$$K := \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}}. \tag{8}$$

Zoals we zo later zullen bewijzen geldt dat het kwadratisch gemiddelde groter is dan het rekenkundig gemiddelde. Door nu alle ongelijkheden over gemiddelden die we tot nu toe hebben samen te voegen krijgen we het volgende rijtje

$$\min \leq H \leq M \leq R \leq K \leq \max. \tag{9}$$

Het rekenkundig, harmonisch en kwadratisch gemiddelde zijn allemaal van de vorm

$$\left(\frac{x_1^p + x_2^p + \cdots + x_n^p}{n}\right)^{1/p}$$

voor $p = 1$, $p = -1$ of $p = 2$ respectievelijk. We kunnen dan ook op deze manier in het algemeen voor $p \neq 0$ het p-gemiddelde definiëren als

$$M_p := \left(\frac{x_1^p + x_2^p + \cdots + x_n^p}{n}\right)^{1/p} \tag{10}$$

We definiëren verder M_0 als het meetkundig gemiddelde. Dit is een logische definitie, want er geldt $\lim_{p\to 0} M_p = M$, maar dat gaan we niet bewijzen. Er geldt nu de volgende ongelijkheid voor $p \leq q$

$$M_p \leq M_q, \tag{11}$$

met gelijkheid alleen als alle getallen gelijk zijn. Het bewijs hiervan zullen we later nog leveren.

Opgave 3.15 Voor $a, b > 0$ geldt $a + b = 1$. Toon aan dat

$$(a + \frac{1}{a})^2 + (b + \frac{1}{b})^2 \geq \frac{25}{2}.$$

Opgave 3.16 Zij a, b en c reële getallen. Bewijs dat

$$(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2).$$

Opgave 3.17 De niet-negatieve getallen a, b en c voldoen aan $a + b + c \geq 3$. Laat zien dat

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 3.$$

Opgave 3.18 Zij $a + b \geq c \geq 0$. Bewijs dat

$$a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}c^2.$$

Opgave 3.19 Zij $a + b \geq c \geq 0$. Bewijs dat

$$a^4 + b^4 \geq \frac{1}{8}c^4.$$

Opgave 3.20 Zij a, b en c reële positieve getallen. Bewijs dat

$$\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \leq \frac{1}{2}(a + b + c).$$

Opgave 3.21 Bewijs dat voor reële getallen a, b en c geldt

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq abc(a + b + c).$$

Opgave 3.22 Voor $a, b > 0$ geldt

$$(a + b)^4 \leq 8(a^4 + b^4).$$

Opgave 3.23 Zij $a, b, c, d > 0$. Toon aan dat

$$\frac{12}{a+b+c+d} \leq \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+d} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{b+d} + \frac{1}{c+d} \leq \frac{3}{4}(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}).$$

Opgave 3.24 Toon aan dat voor alle $a, b, c > 0$ geldt dat

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Opgave 3.25 Zij $a_1, a_2, \ldots, a_n$ positieve reële getallen, elk kleiner dan 1. Noem $s = \sum a_i$. Toon aan dat de volgende ongelijkheden gelden

$$1 - s \leq (1 - a_1)(1 - a_2) \cdots (1 - a_n) \leq \frac{1}{1+s},$$
$$1 + s \leq (1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n) \leq \frac{1}{1-s}.$$

Hierbij nemen we in de tweede ongelijkheid aan dat $s < 1$.

Opgave 3.26 Bewijs dat

$$\frac{1}{1999} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{1997}{1998} < \frac{1}{44}.$$

Opgave 3.27 (Ierland 1997) Laat a, b en c niet-negatieve reële getallen zijn, zodat $a + b + c \geq abc$. Bewijs dat

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq abc.$$

Kedlaya: Bewijs dat zelfs

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \sqrt{3}abc.$$

Opgave 3.28 (Japan 1997) Laat a, b en c positieve gehele getallen zijn. Bewijs dat

$$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2 + a^2} + \frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2 + b^2} + \frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2 + c^2} \geq \frac{3}{5}.$$

Opgave 3.29 (Korea 1997) Zij $a_1, a_2, \ldots, a_n$ positieve reële getallen zijn. Definiëer R, M en H als het rekenkundig, meetkundig en harmonisch gemiddelde respectievelijk.

1. Bewijs dat $R/H \leq -1 + (R/M)^n$ voor n even;
2. Bewijs dat $R/H \leq -(n-2)/n + 2(n-1)/n(R/M)^n$ voor n oneven.

Opgave 3.30 (Canada 1998) Zij $n \geq 2$ een natuurlijk getal. Laat zien dat

$$\frac{1}{n+1}\left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right) > \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right).$$

Opgave 3.31 (Ierland 1998) Bewijs dat als a, b, c positieve reële getallen zijn dan

$$\frac{9}{a+b+c} \leq 2\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right) \leq \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

Opgave 3.32 (Vietnam 1998) Laat $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \geq 2)$ positieve getallen zijn zodat

$$\frac{1}{x_1 + 1998} + \frac{1}{x_2 + 1998} + \cdots + \frac{1}{x_n + 1998} = \frac{1}{1998}.$$

Bewijs dat

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} n - 1 \geq 1998.$$

3.3 Gewogen gemiddeldes

Zoals van het rekenkundig gemiddelde ook een gewogen versie bestaat, gedefinieerd voor een rij gewichten $w_i > 0$ als

$$R_w := \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \cdots + w_n x_n}{w_1 + w_2 + \cdots + w_n},$$

bestaan er ook gewogen versies van alle gemiddeldes M_p die we in de vorige paragraaf hebben gedefinieerd. Uit gemak kiezen we de gewichten w_i zó dat $w_1 + w_2 + \cdots + w_n = 1$. Dan definiëren we voor $p \neq 0$

$$M_{p,w} := \left(w_1 x_1^p + w_2 x_2^p + \cdots + w_n x_n^p\right)^{1/p}$$

en voor $p = 0$ definiëren we

$$M_{0,w} := x_1^{w_1} x_2^{w_2} \cdots x_n^{w_n}.$$

Je ziet dat het invullen van $w_i = 1/n$ voor alle i de ongewogen gemiddeldes oplevert. Er geldt nu het volgende analogon van de ongelijkheid (11)

$$M_{p,w} \leq M_{q,w},$$

als $p \leq q$. Let op dat je wel aan beide kanten dezelfde rij gewichten moet gebruiken.

Opgave 3.33 Bewijs dat voor natuurlijke getallen m, n geldt dat

$$\sqrt[n+m]{n^{2m} m^{2n}} \leq \frac{1}{2}(n^2 + m^2).$$

Opgave 3.34 Zij $a, b, c > 0$. Toon aan dat

$$a^a b^b c^c \geq (abc)^{(a+b+c)/3}.$$

Opgave 3.35 (Rusland 1997) Laat zien dat voor $1 < a < b < c$ geldt

$$\log[a](\log[a]b) + \log[b](\log[b]c) + \log[c](\log[c]a) > 0.$$

Opgave 3.36 (IMO 1982) Men beschouwt rijen reële getallen $(x_n)_{n \in N}$ zodat $x_0 = 1$ en zodat voor alle $i \geq 0$ geldt $0 < x_{i+1} \leq x_i$.

1. Toon aan dat voor elk van die rijen er een $n \in N$ bestaat zodat geldt

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \cdots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} \geq 3,999.$$

2. Bepaal zulk een rij waarvoor bovendien geldt dat voor alle $n \in N$ geldt

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \cdots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} \leq 4.$$

Opgave 3.37 (IMO 1999) Zij n een geheel getal met $n \geq 2$.

1. Bepaal de kleinste constante C zodanig dat de ongelijkheid

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq C \left(\sum_{1 \leq i \leq n} x_i \right)^4$$

   geldt voor alle niet-negatieve reële getallen $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

2. Bepaal wanneer voor deze constante C gelijkheid optreedt.

4 Een paar belangrijke ongelijkheden

Behalve ongelijkheden tussen gemiddelden, zijn er nog een paar ongelijkheden die je regelmatig kan herkennen in ongelijkheden op olympiades. De belangrijkste van die ongelijkheden worden in deze sectie beschreven.

4.1 Cauchy - Schwarz

De volgende ongelijkheid is heel belangrijk in allerlei takken van wiskunde en kan ook bij olympiades heel krachtig gebruikt worden (vaak ook als je het helemaal niet verwacht).

Stelling 4.1 *Als* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *en* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *twee rijtjes reële getallen zijn, dan geldt de volgende ongelijkheid*

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i^2 \geq \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2, \tag{12}$$

met gelijkheid dan en slechts dan als de twee rijen getallen proportioneel zijn (i.e. als $x_i/y_i = x_j/y_j$ *voor alle* i, j*).*

Het bewijs dat meestal van deze ongelijkheid wordt gegeven maakt op een heel geraffineerde manier gebruik van het feit dat de discriminant van een tweedegraads vergelijking bepaalt of een parabool helemaal boven de lijn $y = 0$ ligt of die lijn juist snijdt.
Bewijs: Bekijk de volgende kwadratische functie in t

$$P(t) := \sum_{i=1}^n (x_i - ty_i)^2. \tag{13}$$

Aangezien $P(t)$ de som van een aantal kwadraten is, is $P(t)$ voor alle waarden van t positief. Als we het kwadraat uitwerken zien we dat

$$P(t) = t^2 \sum_{i=1}^n y_i^2 - 2t \sum_{i=1}^n x_i y_i + \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

Dus de grafiek van $P(t)$ is een parabool, waarvan we al weten dat hij helemaal boven de lijn $y = 0$ ligt. De discriminant van het polynoom is dus niet-positief, ofwel

$$4\left(\sum_{i=}^n x_i y_i\right)^2 - 4\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i^2 \leq 0.$$

Enig herschrijven levert de gevraagde ongelijkheid op.

Gelijkheid kan alleen optreden als de discriminant 0 is, ofwel als $P(t)$ precies één nulpunt heeft. $P(t) = 0$ betekent dat elke term in de som in (13) nul moet zijn, ofwel dat $t = x_i/y_i$. Dit gebeurt dus precies dan als de rijtjes x_i en y_i proportioneel zijn. ◇

Een ander bewijs dat wat minder geraffineerd is, maar daarom misschien makkelijker te begrijpen komt in feite neer op het botweg invullen van de waarde van t die $P(t)$ uit het vorige bewijs minimaliseert. Dus nogmaals een bewijs van de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz:
Bewijs: Gebruik de afkortingen

$$Sx := \sum_{i=1}^n x_i^2, \qquad Sy := \sum_{i=1}^n y_i^2, \qquad Sxy := \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

We werken de volgende, duidelijk positieve, som uit

$$0 \leq Sy \sum_{i=1}^n (x_i - y_i \frac{Sxy}{Sy})^2 = Sy \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2Sy \sum_{i=1}^n x_i y_i \frac{Sxy}{Sy} + Sy \sum_{i=1}^n y_i^2 \frac{Sxy^2}{Sy^2} = SySx - Sxy^2.$$

Het overhalen van Sxy^2 naar de ander kant levert meteen de gevraagde ongelijkheid op. Dat de gelijkheid optreedt als de twee rijtjes proportioneel zijn kun je vervolgens op dezelfde manier als in het eerste bewijs aantonen. ◇

Een derde bewijs gaat behulp van de (tot nu toe nog door ons onbewezen) gewogen ongelijkheid van het kwadratisch en rekenkundig gemiddelde.

Bewijs: Aangezien in de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz geldt dat de ongelijkheid alleen maar sterker wordt door van alle variabelen de absolute waarde te nemen (de linkerkant van (12) blijft dan gelijk en de rechterkant word groter) kunnen we aannemen dat alle variabelen niet-negatief zijn. Als alle y_i nul zijn is de ongelijkheid triviaal waar, dus we kunnen ook aannemen dat dat niet het geval is.

Voor de gewichten $w_i = y_i^2 / \sum y_j^2$ is de ongelijkheid van het kwadratisch en rekenkundig gemiddelde in de waardes x_i/y_i gelijk aan

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2}} \geq \frac{x_1 y_1 + x_2 y^2 + \cdots + x_n y_n}{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2}.$$

Links en recht vermenigvuldigen met $\sum y_j^2$ en daarna beide kanten kwadrateren (mag want beide kanten zijn positief wegens onze aannames) geeft de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz. ◇

Anderzijds kunnen we met behulp van Cauchy-Schwarz de ongelijkheid van het rekenkundig en kwadratisch gemiddelde makkelijk bewijzen.

Voorbeeld 4.2 Vul in de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz de waardes $y_i = 1$ in en zie

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n 1 \geq \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2.$$

Trek nu de wortel aan beide kanten en deel door n om de ongelijkheid van het rekenkundig en kwadratisch gemiddelde te krijgen.

Opgave 4.1 Bewijs dat voor alle x, y en z geldt dat

$$\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6} \right)^2 \leq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{6}.$$

Opgave 4.2 Bewijs de driehoeksongelijkheid in de n-dimensionale ruimte. Ofwel voor twee rijtjes reële getallen x_i en y_i geldt

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} \leq \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} + \sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2}.$$

Opgave 4.3 Bewijs voor alle niet-negatieve p_i en x_i dat

$$(p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n)^2 \leq (p_1 + \cdots + p_n)(p_1 x_1^2 + \cdots + p_n x_n^2).$$

Opgave 4.4 Bewijs voor alle niet-negatieve $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en $y_1, y_2, \ldots, y_n$ dat

$$\sqrt{x_1 y_1} + \cdots + \sqrt{x_n y_n} \leq \sqrt{x_1 + \cdots + x_n} \sqrt{y_1 + \cdots + y_n}.$$

Opgave 4.5 (Rusland 1997) Zij $P(x)$ een kwadratisch polynoom met niet-negatieve coefficienten. Bewijs dat voor elk reëel getal x en y geldt

$$P(xy)^2 \leq P(x)P(y).$$

Opgave 4.6 (IMO 1987) Gegeven zijn reële getallen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ waarvoor geldt $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$. Bewijs dat er voor elk getal $k \geq 2$ gehele getallen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bestaan, niet alle gelijk aan nul, die voor alle $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ voldoen aan $|a_i| \leq k - 1$, zodanig dat geldt

$$|a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n| \leq \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n - 1}.$$

Opgave 4.7 (IMO 1992) Zij S de eindige verzameling punten in de drie-dimensionale ruimte met een orthogonaal assenstelsel O_{xyz}. De verzamelingen S_x,S_y en S_z bestaan uit de orthogonale projecties van de punten van S op respectievelijk het O_{yz}-vlak, het O_{xz}-vlak en het O_{xy}-vlak. Bewijs dat

$$|S|^2 \leq |S_x||S_y||S_z|.$$

4.2 De herschikkingsongelijkheid

De herschikkingsongelijkheid gaat over rijtjes getallen en de manieren waarop je die kunt ordenen. We zullen dus eerst het begrip permutatie bekijken. Een permutatie is een bijectieve afbeelding van een verzameling naar zichzelf, meestal de verzameling $N = \{1, 2, \dots, n\}$. Als σ nu een permutatie is van N geldt dus dat $\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)$ weer een rijtje is van de getallen 1 t/m n, maar nu in een andere volgorde. Een permutatie van een rijtje getallen is dus weer rijtje van dezelfde getallen, maar nu in een andere volgorde. Een permutatie van $y_1, y_2, \dots, y_n$ kan geschreven worden als $y_{\sigma(1)}, y_{\sigma(2)}, \dots, y_{\sigma(n)}$, waar σ een permutatie van N is.

Stelling 4.3 *Zij $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$ en $y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n$ twee rijtjes reële getallen. Zij bovendien het rijtje z_i een permutatie van het rijtje y_i. Dan geldt de volgende ongelijkheid*

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n \geq x_1z_1 + x_2z_2 + \cdots + x_nz_n \geq x_1y_n + x_2y_{n-1} + \cdots + x_ny_1. \tag{14}$$

Bewijs: We bewijzen alleen de eerste ongelijkheid, het bewijs van de tweede is soortgelijk. Het bewijs dat we geven is een mooie toepassing van een halfvariant. Onze toestanden zullen de permutaties van het rijtje y_i zijn. Als bewerking nemen we het verwisselen van twee getallen z_i en z_j van een permutatie als $i > j$ en $z_i < z_j$. Onze halfvariant is de som

$$T(z_1, z_2, \dots, z_n) = x_1z_1 + x_2z_2 + \cdots + x_nz_n.$$

Noem het nieuwe rijtje dat we krijgen door verwisseling van twee getallen $z_{\sigma(i)}$ (hier is σ dus de permutatie die i en j verwisselt). Als we z_i en z_j verwisselen zien we dat de som T verandert volgens

$$T(z_{\sigma(1)}, \dots, z_{\sigma(n)}) - T(z_1, \dots, z_n) = x_iz_j + x_jz_i - x_iz_i - x_jz_j = (x_i - x_j)(z_j - z_i) \geq 0.$$

We zien dus dat T stijgend is. We kunnen deze bewerking herhalen zo lang er getallen $z_i > z_j$ zijn met $i < j$, ofwel zolang we nog niet in de aflopende permutatie y_i terecht zijn gekomen. Als we zouden weten dat we na een eindig aantal stappen geen verwisselingen meer kunnen uitvoeren, dan zou het bewijs klaar zijn, want dan volgt dat de eindtoestand, de permutatie y_i de grootste som zou opleveren.

Als alle x_i verschillend zijn dan volgt dat T strikt stijgend is en daarom kan je nooit meer terugkeren in dezelfde permutatie door onze bewerking. Aangezien er maar een eindig aantal permutaties van de getallen y_i bestaan eindigt onze bewerking dus een keer. Om ook het geval met een paar gelijke x_i's te behandelen kun je of werken met limieten (dus kijken wat er gebeurt als je alle x_i verschillend maakt door ze een heel klein beetje te veranderen) of door nog een andere halfvariant te bekijken.

Dat laatste gaan we hier doen, namelijk de functie S gedefinieerd als het aantal paren getallen (i, j) met $i < j$ en $z_j < z_i$. Dit aantal daalt namelijk strikt door onze bewerking (ga na!). Net als in het geval van alle x_i verschillend het geval was betekent dit, samen met het feit dat er maar een eindig aantal permutaties zijn, dat we maar een eindig aantal stappen kunnen doen. $\diamond$

Deze ongelijkheid kun je niet alleen toepassen als je iets weet van de volgorde van de grootte van elementen, maar ook als er een zekere symmetrie in de ongelijkheid voorkomt. In het laatste geval mag je namelijk extra condities opleggen en dus mag je dan soms stellen dat de getallen in een bepaalde volgorde staan.

Voorbeeld 4.4 Bewijs voor alle getallen $a, b, c > 0$ de volgende ongelijkheid

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3$$

Bewijs: Uit symmetrie mogen we stellen dat $a \geq b \geq c$ of juist $a \leq b \leq c$. We behandelen alleen het eerste geval, het tweede geval gaat op dezelfde manier. We zien dat $1/c \geq 1/b \geq 1/a$, dus geldt met behulp van de herschikkingsongelijkheid dat

$$a\frac{1}{b} + b\frac{1}{c} + c\frac{1}{a} \geq a\frac{1}{a} + b\frac{1}{b} + c\frac{1}{c} = 3,$$

aangezien de rechterkant de omgekeerde ordening geeft. $\diamond$

We kunnen ook op een geraffineerde manier de ongelijkheid van het rekenkundig en meetkundig gemiddelde (5) nog een keer bewijzen.

Bewijs van (5): Zij $x_i > 0$ en c het meetkundig gemiddelde van de x_i. Definieer de twee rijtjes a_i en b_i door $a_1 = x_1/c$, $a_2 = a_1x_2/c$, $\ldots$, $a_n = a_{n-1}x_n/c$ en door $b_i = 1/a_i$ voor $1 \leq i \leq n$. Merk op dat nu $a_n = x_1x_2\cdots x_n/c^n = 1$. Aangezien de rijtjes a_i en b_i nu omgekeerd geordend zijn geldt dat

$$n = a_1b_1 + \cdots + a_nb_n \leq a_1b_n + a_2b_1 + \cdots + a_nb_{n-1} = \frac{x_1}{c} + \frac{x_2}{c} + \cdots + \frac{x_n}{c}.$$

Hieruit volgt direct de gevraagde ongelijkheid. Merk op dat we hier niet de volgorde van de getallen a_i of b_i weten, maar toch herschikking kunnen gebruiken. $\diamond$

Bovendien hoef je niet altijd herschikking te gebruiken met aan een van beide kanten van de ongelijkheid een monotone permutatie. Uit het bewijs volgt namelijk dat als je van de ene permutatie naar de andere kan gaan door alleen paren getallen om te wisselen die in de "verkeerde" volgorde staan je ook kan zeggen dat de ene permutatie groter is dan de andere.

Opgave 4.8 Bewijs dat voor alle $x, y, z > 0$ geldt

$$x + y + z \leq \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x}.$$

Opgave 4.9 Toon aan dat voor de drie hoeken α, β en γ van een scherphoekige driehoek geldt

$$\sin(2\alpha) + \sin(2\beta) + \sin(2\gamma) \leq \sin(x + y) + \sin(z + x) + \sin(y + z).$$

Opgave 4.10 Bewijs voor 3 positieve getallen x, y en z dat

$$3xyz \leq x^2y + y^2z + z^2x.$$

Opgave 4.11 (Iran 1997) Stel dat $w_1, w_2, \ldots, w_k$ verschillende reële getallen zijn met som ongelijk aan nul. Bewijs dat er gehele getallen $n_1, n_2, \ldots, n_k$ bestaan zodat $n_1w_2 + n_2w_2 + \cdots + n_kw_k > 0$, maar dat voor elke permutatie π van $\{1, 2, \ldots, k\}$ ongelijk aan de identiteit geldt dat

$$n_1w_{\pi(1)} + n_2w_{\pi(2)} + \cdots + n_kw_{\pi(k)} < 0.$$

Opgave 4.12 (IMO 1978) Laat $(a_k)_{k\in N}$ een rij paarsgewijs verschillende positieve gehele getallen zijn. Bewijs dat voor alle $n \in N$ geldt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

4.3 Tsjebyshev

Door op een goede manier een aantal herschikkingsongelijkheden bij elkaar op te tellen kunnen we een andere nuttige ongelijkheid bewijzen: de ongelijkheid van Tsjebyshev.

Stelling 4.5 *Laten x_i en y_i aflopend geordende rijtjes reële getallen zijn, dan geldt*

$$\frac{x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n}{n} \geq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \cdot \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n} \geq \frac{x_1y_n + x_2y_{n-1} + \cdots + x_ny_1}{n}. \quad (15)$$

Bewijs: We bewijzen weer alleen de eerste ongelijkheid, de tweede gaat op identieke wijze. Aangezien x_i en y_i gelijk geordend zijn is $x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$ de maximale som en gelden de volgende ongelijkheden volgens de herschikkingsongelijkheid

$$\begin{array}{rcl} x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n & \geq & x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n \\ x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n & \geq & x_1y_2 + x_2y_3 + \cdots + x_ny_1 \\ \vdots & & \vdots \\ x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n & \geq & x_1y_n + x_2y_1 + \cdots + x_ny_{n-1} \end{array}$$

Beide kanten bij elkaar optellen en door n delen geeft de gevraagde ongelijkheid. $\diamond$

Opgave 4.13 Bewijs de ongelijkheid van het kwadratisch en het rekenkundig gemiddelde met behulp van Tsjebyshev.

Opgave 4.14 Bewijs de ongelijkheid van het rekenkundig en harmonisch gemiddelde met behulp van Tsjebyshev.

Opgave 4.15 Voor 3 positieve getallen x, y en z bewijs dat

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \leq \frac{x+y+z}{2}.$$

Opgave 4.16 (IMO 1997) Stel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zijn reële getallen die aan de volgende voorwaarden voldoen:

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| = 1$$

en

$$|x_i| \leq \frac{n+1}{2} \text{ voor } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Toon aan dat er een herschikking $y_1, y_2, \ldots, y_n$ van $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bestaat zodat

$$|y_1 + 2y_2 + \cdots + ny_n| \leq \frac{n+1}{2}.$$

5 Jensen's ongelijkheid en gladmaken

Gladmaken is een manier om met klooien een ongelijkheid te bewijzen. Dit klinkt niet erg aantrekkelijk en in de meeste gevallen is een bewijs met een andere methode een stuk mooier (en korter). Echter mooie bewijzen kun je niet altijd bedenken en dan kun je proberen om een ongelijkheid te bewijzen door gladmaken. Jensen's ongelijkheid kun je zien als een methode om op een fraaie manier zonder rompslomp gladmaken te gebruiken. Ook als niet meteen aan de exacte voorwaarden van Jensen is voldaan kun je vaak met de gedachte aan Jensen makkelijker gladmaken.

5.1 Jensen's ongelijkheid

Jensen's ongelijkheid gaat over splitsbare ongelijkheden. Dit betekent dat je een kant van de ongelijkheid kan schrijven als som van termen die alleen maar van één variabele afhangen, in plaats van bijvoorbeeld alle n. Als die termen dan ook nog steeds op dezelfde manier van die ene variabele afhangen kun je die kant schrijven als $f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)$ voor een zekere functie f.

Hoe we zo'n term kunnen afschatten hangt natuurlijk af van de eigenschappen van f. In het bijzonder willen we weten of de functie f convex, concaaf dan wel geen van beide is. Een functie heet convex op het interval I als voor alle $x, y \in I$ en $t \in (0, 1)$ geldt dat

$$tf(x) + (1-t)f(y) \geq f(tx + (1-t)y), \tag{16}$$

ofwel als de lijn tussen $(x, f(x)$ en $(y, f(y)$ in R^2 geheel boven de grafiek ligt, ofwel als de verzameling $\{(x,y)|x \in I, y \geq f(x)\} \subseteq R^2$ convex is. Het typische voorbeeld is de functie $f(x) = x^2$ op R, maar ook functies als $-\log$ op $R_{>0}$ en sin op $[-\pi, 0]$ zijn convex. Het laatste voorbeeld laat zien dat je soms het domein van een functie moet beperken om hem convex te maken op een deelinterval van het oorspronkelijke domein. Een functie f heet concaaf als $-f$ convex is.

Een makkelijke manier om te zien of een functie convex is, is om te kijken naar de tweede afgeleide. Als die namelijk niet-negatief is op een interval dan is de functie convex op dat interval. Concaaf is de functie dan dus op de intervallen waar de tweede afgeleide niet-positief is. Dit gaan we niet bewijzen, maar volgt uit het feit dat de raaklijn van de functie in het eerste geval geheel onder de grafiek ligt en in het tweede geval er juist boven.

Nu zijn we klaar om de stelling van Jensen te formuleren

Stelling 5.1 *Zij f een convexe functie op het interval I en laat $x_i \in I$ een rij getallen zijn. Dan geldt dat*

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n} \geq f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right). \tag{17}$$

Als f juist een concave functie is dan geldt de ongelijkheid met omgekeerd teken.

De stelling zegt dus voor een convexe functie het rekenkundig gemiddelde van de functiewaardes groter is dan de functiewaarde van het rekenkundig gemiddelde.

Bewijs: We bewijzen alleen het geval voor f convex, het andere geval gaat analoog, of door te kijken naar de ongelijkheid voor $-f$ (als f concaaf is, is $-f$ namelijk juist convex). We gaan het bewijzen met inductie naar n. Het basisgeval $n = 1$ is triviaal. Stel dat de ongelijkheid geldt voor $n = k - 1$. Met behulp van de eerste karakterisatie van convexiteit en de inductiehypothese zien we dan dat

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k} f(x_i) &= \sum_{i=1}^{k-1} f(x_i) + f(x_k) \\ &\geq (k-1) f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1}}{k-1}\right) + f(x_k) \geq k f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_k}{k}\right).\end{aligned}$$

In de laatste ongelijkheid gebruikten we (16) met de twee waardes $x = \sum_{i=1}^{k-1} x_i/(k-1)$ en $y = x_k$ en $t = (k-1)/k$ (merk op dat $\sum_{i=1}^{k-1} x_i$ ook in I ligt). Dus geldt de ongelijkheid ook voor $n = k$. Uit inductie volgt nu dat de ongelijkheid geldt voor alle n. $\diamond$ Met deze ongelijkheid is de

ongelijkheid (11) tussen het p- en q-gemiddelde makkelijk te bewijzen.

Bewijs: Als $p > q > 0$ is $f(x) = x^{p/q}$ een convexe functie op $[0, \infty)$. Daarom geldt met behulp van Jensen voor de positieve getallen x_i^q dat

$$\frac{(x_1^q)^{p/q} + (x_2^q)^{p/q} + \cdots + (x_n^q)^{p/q}}{n} \geq \left(\frac{x_1^q + x_2^q + \cdots + x_n^q}{n}\right)^{p/q}.$$

Links en rechts tot de macht $1/p > 0$ verheffen geeft nu de gevraagde ongelijkheid voor x_i. Als $p > q = 0$ kunnen we de concave functie $f(x) = \log(x^p) = p\log(x)$ gebruiken, dan zien we namelijk dat

$$\frac{\log(x_1^p) + \log(x_2^p) + \cdots + \log(x_n^p)}{n} \leq \log(\frac{x_1^p + x_2^p + \cdots + x_n^p}{n}).$$

Delen door p en van beide kanten de e-macht nemen geeft het gewenste resultaat. Alle gevallen met negatieve q kunnen we halen uit de symmetrie eigenschap

$$M_p(x_1, x_2, \ldots, x_n) M_{-p}(1/x_1, 1/x_2, \ldots, 1/x_n) = 1,$$

eventueel door als tussenstap $r = 0$ te nemen voor $p > 0 > q$. $\diamond$

Voor het geval $q = 0$ hebben we eerst de logaritme van beide helften genomen om een product in een som te veranderen, zodat we daarop Jensen konden toepassen. Dit is een truc die wel vaker gebruikt kan worden.

Opgave 5.1 Zij $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$. Toon aan dat

$$\frac{a_1}{a_2 + \cdots + a_n} + \frac{a_2}{a_3 + \cdots + a_n + a_1} + \cdots + \frac{a_n}{a_1 + \cdots + a_{n-1}} \geq \frac{n}{n-1}.$$

Opgave 5.2 Zij $x_1, x_2, \ldots, x_n$ een verzameling positieve getallen met $\sum x_i = 2$. Toon aan dat

$$\frac{x_1^2}{1 + (x_2 + \cdots + x_n)} + \frac{x_2^2}{1 + (x_3 + \cdots + x_n + x_1)} + \cdots + \frac{x_n^2}{1 + (x_1 + \cdots + x_{n-1})} \geq \frac{4}{3n-2}.$$

Opgave 5.3 Toon aan dat voor $a, b, c > 0$ geldt dat

$$\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \geq a + b + c.$$

Opgave 5.4 α, β en γ zijn de hoeken van een driehoek. Bewijs dat

$$\tan(\alpha/2) + \tan(\beta/2) + \tan(\gamma/2) \geq \sqrt{3},$$
$$\tan(\alpha/2)^2 + \tan(\beta/2)^2 + \tan(\gamma/2)^2 \geq 1.$$

Opgave 5.5 (Turkije 1997) Gegeven een geheel getal $n \geq 2$. Vind de minimale waarde van

$$\frac{x_1^5}{x_2 + x_3 + \cdots + x_n} + \frac{x_2^5}{x_3 + \cdots + x_n + x_1} + \frac{x_n^5}{x_1 + \cdots + x_{n-1}}$$

voor positieve gehele getallen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gegeven dat $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$.

5.1.1 Gewogen Jensen

Zoals voor gemiddeldes ook gewogen versies bestaan, bestaat er ook een gewogen versie van Jensen's ongelijkheid. Gezien onze eerdere karakterisatie van Jensen's ongelijkheid als dat het rekenkundig gemiddelde van de functiewaardes groter is dan de functiewaarde van het rekenkundig gemiddelde zal het je misschien niet verbazen dat de gewogen versie van Jensen's ongelijkheid hetzelfde zegt, maar nu met gewogen rekenkundige gemiddeldes.

Stelling 5.2 *Zij f een convexe functie op het interval I en laat $x_i \in I$ een rij getallen zijn. Laat bovendien $w_i > 0$ een rij gewichten zijn met $\sum w_i = 1$. Dan geldt dat*

$$w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + \cdots + w_n f(x_n) \geq f(w_1 x_1 + w_2 x_2 + \cdots + w_n x_n). \tag{18}$$

Als f juist concaaf is dan geldt de ongelijkheid met omgekeerd teken.

Het bewijs gaat op een identieke wijze als voor het geval met gelijke gewichten. Met behulp van deze versie van Jensen's ongelijkheid kunnen we ook de gewogen versie van de ongelijkheid tussen het p- en q-gemiddelde bewijzen op dezelfde wijze als we eerst de ongewogen versie hebben bewezen.

5.2 Gladmaken

Als je een ongelijkheid niet direct kunt bewijzen door hem te reduceren tot een bekende ongelijkheid, maar als je wel denkt te weten wanneer gelijkheid optreedt, kun je proberen de ongelijkheid met gladmaken te bewijzen. In het bijzonder kun je dit proberen te doen als je de ongelijkheid hebt herschreven in de vorm die voor Jensen goed is, maar je functie blijkt niet op het hele interval convex/concaaf te zijn (maar dit hoeft zeker niet het geval te zijn om de techniek van gladmaken te gebruiken).

Laten we er even vanuit gaan dat je ongelijkheid is herschreven tot $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0$ (door wat simpele manipulaties is dit altijd makkelijk te doen.) Het idee is nu om de waardes van de parameters in stapjes zo te veranderen dat je ze uiteindelijk gelijk maakt aan de waardes waarvoor gelijkheid optreedt, maar wel zo dat je van elke stap weet dat ze de functie f laten dalen. Als je naar het bewijs kijkt van de herschikkingsongelijkheid zul je zien dat we daar deze methode al hebben toegepast.

In het geval dat je net Jensen had geprobeerd weet je in elk geval wat er gebeurt als je twee getallen naar elkaar toe laat bewegen of uit elkaar haalt door een transformatie van de vorm $x_i \to x_i + c$ en $x_j \to x_j - c$ als x_i en x_j tenminste in een interval zitten waarop de functie die je had convex/concaaf was.

Voorbeeld 5.3 Een driehoek heeft hoeken α, β en γ. Bewijs de ongelijkheid

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) + \cos(\gamma) \geq \frac{1}{2}.$$

Bewijs: Ten eerste merken we op dat $1/2 = \cos(\pi/3) = \cos((\alpha+\beta+\gamma)/3)$ en dat de ongelijkheid dus precies van de vorm (18) is als de cosinus convex zou zijn. De tweede afgeleide van cos is $-\cos$ en dus positief op $[0, \pi/2]$ en negatief op $[\pi/2, \pi]$ (aangezien we praten over hoeken van een driehoek is alleen het interval $[0, \pi]$ belangrijk en kan het ons dus niets schelen wat de cosinus daarbuiten doet). Helaas is cos dus niet op het hele interval convex en moeten we dus overgaan op gladmaken. Als alle hoeken scherp zijn liggen ze wel allemaal in het interval waarin cos convex is en kunnen we Jensen wel toepassen en geldt de ongelijkheid dus. Laten we aannemen dat $\alpha > \pi/2$. We gaan nu kijken hoe de linkerkant van de ongelijkheid verandert als we α en β vervangen door $\pi/2$ en $\alpha+\beta-\pi/2$ (hiermee veranderen we de hoeken zo dat we een scherphoekige driehoek overhouden). Er volgt uit elementaire gonio formules dat

$$\cos(\pi/2) + \cos(\alpha + \beta - \pi/2) = 0 + \sin(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta).$$

Aangezien $\cos(x)/(1 - \sin(x))$ een dalende functie is (differentieer maar) zien we dat

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) \geq \cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta) = \cos(\pi/2) + \cos(\alpha + \beta - \pi/2).$$

$\diamond$

Opgave 5.6 (Tsjechië en Slowakije 1997) Bepaal voor elk natuurlijk getal $n \geq 2$ de grootst mogelijke waarde van

$$V_n = \sin(x_1)\cos(x_2) + \sin(x_2)\cos(x_3) + \cdots + \sin(x_n)\cos(x_1),$$

waar de x_i willekeurige reële getallen zijn.

6 Ongelijkheden in symmetrische polynomen

Een polynoom $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ in n variabelen heet symmetrisch als hij dezelfde waarde aanneemt voor alle permutaties van de getallen x_i. Het leuke aan symmetrische polynomen is dat er een heel makkelijk kenmerk is waarmee ongelijkheden tussen symmetrische polynomen over positieve getallen direct kunnen worden bewezen.

6.1 Rekenen met symmetrische polynomen

Voor we naar ongelijkheden gaan kijken, moeten we eerst kijken hoe we makkelijk met symmetrische polynomen kunnen rekenen. Er staan namelijk vaak hele lange uitdrukkingen (zeker als er meer dan 2 of 3 variabelen in het geding zijn). Dus willen we een soort som-notatie voor symmetrische polynomen, waarmee we ze kort kunnen opschrijven. We definieren dus

$$\sum_{\text{sym}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}).$$

Hier is S_n de verzameling van alle permutaties van de verzameling $\{1, 2, \ldots, n\}$ en sommeren we dus over alle permutaties van x_i. De factor $1/n!$ is toegevoegd om ervoor te zorgen dat $\sum_{\text{sym}} f = f$ voor een symmetrische functie f. Bovendien blijkt straks dat het een goede controle op berekeningen geeft. Als er maar een paar variabelen zijn schrijven we ook wel dingen als $\sum_{\text{sym}} a^2b$. De betekenis hiervan hangt af van de context, als alleen variabelen a en b voorkomen is $2\sum_{\text{sym}} a^2b = a^2b + ab^2$, maar als er ook nog een variabele c voorkomt is $6\sum_{\text{sym}} a^2b = a^2b + a^2c + ab^2 + b^2c + ac^2 + bc^2$ enzovoorts. Een paar voorbeelden voor 3 variabelen x, y, z:

$$\begin{aligned}\sum_{\text{sym}} x^3 &= (x^3 + y^3 + z^3)/3,\\ \sum_{\text{sym}} xyz &= xyz,\\ \sum_{\text{sym}} x^2y &= (x^2y + x^2z + xy^2 + xz^2 + y^2z + yz^2)/6.\end{aligned}$$

Dit zijn zelfs alle voorbeelden van symmetrische polynomen van graad 3. Het komt nogal eens voor dat je symmetrische polynomen moet vermenigvuldigen. Dan kan je ook beter niet alles uitwerken. Het product van twee symmetrische polynomen is namelijk weer een symmetrisch polynoom. Het is redelijk eenvoudig om uit te vinden wat voor termen in het product voorkomen. Vervolgens hoef je slechts voor één van die termen precies te tellen hoe vaak die voorkomt in het product, om te weten hoe vaak al zijn permutaties voorkomen.

Voorbeeld 6.1 We rekenenen nu met vier variabelen, x, y, z en w. We berekenen de expressie $\sum_{\text{sym}} x^2y \sum_{\text{sym}} x^2y$ uitgedrukt in nieuwe symmetrische sommen. De termen die zullen voorkomen zijn $x^2y \cdot x^2y = x^4y^2$, $x^2y \cdot x^2z = x^4yz$ $x^2y \cdot xy^2 = x^3y^3$, $x^2y \cdot xz^2 = x^3z^2y$, $x^2y \cdot yz^2 = x^2y^2z^2$ en $x^2y \cdot z^2w = x^2z^2yw$. x^4y^2 kan alleen gemaakt worden door echt $x^2y \cdot x^2y$ te berekenen. x^4y^2 komt dus $1/12 \cdot 1/12$ keer voor in het product en $1/12$ keer in $\sum_{\text{sym}} x^4y^2$ dus de term $\sum_{\text{sym}} x^4y^2$ komt $12/12^2 = 1/12$ keer voor in het product. De term x^4yz kan je krijgen door $x^2y \cdot x^z$, maar ook door $x^2z \cdot x^2y$. Dus komt de term x^4yz in totaal $2/12^2$ keer voor in het product. Hij komt $1/12$ keer voor in $\sum_{\text{sym}} x^4yz$, dus komt de term $\sum_{\text{sym}} x^4yz$ $12 \cdot 2/12^2 = 1/6$ keer voor in het product. Zo doorgaand berekenen we

$$\sum_{\text{sym}} x^2y \sum_{\text{sym}} x^2y =$$
$$\frac{1}{12}\left(\sum_{\text{sym}} x^4y^2 + 2\sum_{\text{sym}} x^4yz + \sum_{\text{sym}} x^3y^3 + 4\sum_{\text{sym}} x^3z^2y + 2\sum_{\text{sym}} x^2y^2z^2 + 2\sum_{\text{sym}} x^2y^2zw\right).$$

Vervolgens kunnen we een controle doen of we goed hebben gerekend, door $x = y = z = w = 1$ in te vullen. Elke $\sum_{\text{sym}}$ term wordt dan namelijk 1 en we zien dat er $1^2 = (1 + 2 + 1 + 4 + 2 + 2)/12$ staat en dat klopt. Dit is nog een heel gereken, maar als we het echt zouden uitwerken zouden we 12 termen met 12 termen vermenigvuldigen en dus wel 144 termen hebben op het eind, die we dan nog moesten ordenen. In dat licht bezien is dit dus nog behoorlijk makkelijk.

6.2 Stelling van Muirhead

Dat gereken is allemaal wel aardig, maar tot nu toe vooral veel werk en om er de vruchten van te plukken zullen we toch ongelijkheden met symmetrische polynomen willen weten. De makkelijkste hiervan is de stelling van Muirhead (ook wel bekend als bunchen).

Stelling 6.2 *Laat $t_1 \geq t_2 \geq \cdots \geq t_n$ en $s_1 \geq s_2 \geq \cdots \geq s_n$ twee geordende rijtjes zijn, zodanig dat $t_1 + t_2 + \cdots + t_n = s_1 + s_2 + \cdots s_n$ en voor alle $1 \leq i \leq n$ geldt $t_1 + \cdots + t_i \geq s_1 + \cdots + s_i$. We zeggen dat het rijtje t_i het rijtje s_i domineert. Dan geldt voor alle $x_i > 0$ de ongelijkheid*

$$\sum_{sym} x_1^{t_1} x_2^{t_2} \cdots x_n^{t_n} \geq \sum_{sym} x_1^{s_1} x_2^{s_2} \cdots x_n^{s_n}. \tag{19}$$

Bewijs: We gaan deze ongelijkheid reduceren tot de herschikkingsongelijkheid. Het is voldoen te bewijzen dat de ongelijkheid geldt voor rijtjes t_i en s_i zodanig dat $t_i = s_i$ voor $i \neq j, j+1$ (zodat $t_j > s_j$ en $t_j + t_{j+1} = s_j + s_{j+1}$.) We kunnen dan vanuit een rijtje t_i in stapjes afdalen naar een rijtje s_i door eerst het overschot $t_1 - s_1$ door te schuiven van t_1 naar t_2, het nieuwe overschot door te schuiven naar t_3 enzovoorts. De voorwaardes in de stelling zorgen ervoor dat het overschot altijd positief is. Preciezer gezegd bewijzen we dus

$$\begin{aligned}\sum_{\text{sym}} x_1^{t_1} x_2^{t_2} \cdots x_n^{t_n} &\geq \sum_{\text{sym}} x_1^{s_1} x_2^{t_1+t_2-s_1} x_3^{t_3} \cdots x_n^{t_n} \\ &\geq \sum_{\text{sym}} x_1^{s_1} x_2^{s_2} x_3^{t_1+t_2+t_3-s_1-s_2} \cdots x_n^{t_n} \\ &\vdots \\ &\geq \sum_{\text{sym}} x_1^{s_1} x_2^{s_2} \cdots x_n^{s_n}.\end{aligned}$$

Het enige probleem is dat eventueel door het doorschuiven van gewicht van t_k naar t_{k+1} het voorkomt dat de nieuwe t_{k+1} groter is dan s_k, de nieuwe t_k. Dit is echter geen probleem, want de voorwaarde dat t_i een dalend rijtje is, is namelijk overbodig, zoals uit het bewijs zal blijken (let echter op dat het rijtje s_i wel dalend is!)

Laten we dus naar twee rijtjes t_i en s_i bekijken, zodanig dat ze bijna overal gelijk zijn, preciezer $t_i = s_i$ voor $i \neq j, j+1$ en $t_j > s_j > s_{j+1} > t_{j+1}$. Voor de duidelijkheid noemen we $t_j - s_j = s_{j+1} - t_{j+1} = \delta > 0$ en $t_j - s_{j+1} = s_j - t_{j+1} = \epsilon > 0$. Dan geldt volgens de herschikkingsongelijkheid met de gelijkgeordende rijtjes x^δ, y^δ en x^ϵ, y^ϵ dat voor alle x, y

$$x^{t_j} y^{t_{j+1}} + x^{t_{j+1}} y^{t_j} = (xy)^{t_{j+1}} (x^{\delta+\epsilon} + y^{\delta+\epsilon}) \geq (xy)^{t_{j+1}} (x^\epsilon y^\delta + x^\delta y^\epsilon) = x^{s_j} y^{s_{j+1}} + x^{s_{j+1}} y^{s_j}.$$

Nu kunnen we als volgt rekenen

$$\begin{aligned}\sum_{\text{sym}} x_1^{t_1} \cdots x_j^{t_j} x_{j+1}^{t_{j+1}} \cdots x_n^{t_n} &= \frac{1}{2} \sum_{\text{sym}} x_1^{t_1} \cdots x_{j-1}^{t_{j-1}} x_{j+2}^{t_{j+2}} \cdots x_n^{t_n} (x_j^{t_j} x_{j+1}^{t_{j+1}} + x_{j+1}^{t_j} x_j^{t_{j+1}}) \\ &\geq \frac{1}{2} \sum_{\text{sym}} x_1^{s_1} \cdots x_{j-1}^{s_{j-1}} x_{j+2}^{s_{j+2}} \cdots x_n^{s_n} (x_j^{s_j} x_{j+1}^{s_{j+1}} + x_{j+1}^{s_j} x_j^{s_{j+1}}) \\ &= \sum_{\text{sym}} x_1^{s_1} \cdots x_n^{s_n}.\end{aligned}$$

Hiermee is de ongelijkheid van Muirhead bewezen. ◇

Met Muirhead kun je sommige ongelijkheden onmiddelijk inzien, bijvoorbeeld de ongelijkheid van het rekenkundig en meetkundig gemiddelde (5). We kunnen die ongelijkheid namelijk zien als

$$\sum_{\text{sym}} x_1 \geq \sum_{\text{sym}} x_1^{1/n} x_2^{1/n} \cdots x_n^{1/n},$$

en het rijtje $(1, 0, 0, \ldots, 0)$ domineert natuurlijk $(1/n, 1/n, \ldots, 1/n)$.

Opgave 6.1 Toon aan dat voor $a, b, c > 0$ de volgende ongelijkheden gelden

$$\begin{aligned}\frac{a^2+b^2}{a+b} &\geq \frac{a+b}{2}, \\ \frac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2} \geq \frac{a+b+c}{3} &\geq \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}} \geq \sqrt[3]{abc}.\end{aligned}$$

Opgave 6.2 (VS 1997) Bewijs dat voor alle positieve reële getallen a, b en c geldt

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc} + \frac{1}{b^3+c^3+abc} + \frac{1}{c^3+a^3+abc} \leq \frac{1}{abc}.$$

6.3 Schur's ongelijkheid

Helaas zijn niet alle ongelijkheden in symmetrische polynomen te bewijzen met alleen Muirhead. De belangrijkste ongelijkheid die je kan gebruiken om in die gevallen nog makkelijk ongelijkheden te bewijzen is de ongelijkheid van Schur.

Stelling 6.3 *Voor 3 getallen $x, y, z > 0$ geldt de volgende ongelijkheid*

$$\sum_{sym} x^3 + \sum_{sym} xyz \geq 2 \sum_{sym} x^2 y \tag{20}$$

Gelijkheid treedt alleen op als $x = y = z$ of als $x = y$ en $z = 0$ of permutatie hiervan.

Bewijs: We gaan de ongelijkheid ontbinden in een aantal duidelijk positieve termen. Uit symmetrie mogen we eerst aannemen dat $x \geq y \geq z$. Dan geldt

$$\sum_{\text{sym}} x^3 - 2\sum_{\text{sym}} x^2 y + \sum_{\text{sym}} xyz = 2(x-y)[x(x-z) - y(y-z)] + z(x-z)(y-z) \geq 0.$$

$\diamond$

Met alleen Muirhead zou je alleen kunnen bewijzen dat $\sum_{\text{sym}} x^3 \geq \sum_{\text{sym}} x^2 y$ en $\sum_{\text{sym}} xyz \leq \sum_{\text{sym}} x^2 y$, we zien met Schur dus dat het verschil in de tweede ongelijkheid kleiner is dan in de eerste.

Er bestaat ook een iets algemere versie van Schur, namelijk

Stelling 6.4 *Voor drie positieve getallen $x, y, z > 0$ en $r > 0$ geldt de volgende ongelijkheid*

$$\sum_{sym} x^{r+2} - 2\sum_{sym} x^{r+1} y + \sum_{sym} x^r yz \geq 0. \tag{21}$$

Gelijkheid treedt alleen op als $x = y = z$ of als $x = y$ en $z = 0$ (en permutaties).

Het bewijs hiervan gaat analoog aan dat voor het bijzondere geval met r=0. Helaas kun je met Schur en de ongelijkheid van Muirhead niet alle ongelijkheden bewijzen, maar veel gevallen gelukkig wel. Als het echter niet lukt, dan kun je echter nog proberen om nog andere ongelijkheden tussen symmetrische polynomen te bewijzen.

Opgave 6.3 (IMO 1984) x, y en z zijn niet-negatieve reële getallen waarvoor geldt $x+y+z = 1$. Bewijs dat

$$0 \leq xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}.$$

6.4 Homogeniseren

Regelmatig komt het voor dat je wel te maken hebt met symmetrische polynomen, maar met een inhomogene ongelijkheid en nog een extra (inhomogene) randvoorwaarde. Deze inhomogeniteit is dan op te heffen (ten koste van soms wel erg veel rekenwerk) door met een goede macht van de randvoorwaarde te vermenigvuldigen.

Voorbeeld 6.5 (Iran 1998) Laten x_1, x_2, x_3 en x_4 positieve getallen zijn zodat $x_1 x_2 x_3 x_4 = 1$. Bewijs dat

$$\sum_{i=1}^{4} x_i^3 \geq \max\left\{\sum_{i=1}^{4} x_i, \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{x_i}\right\}.$$

Bewijs: Eigenlijk moeten we de twee ongelijkheden $\sum_{\text{sym}} x_1^3 \geq \sum_{\text{sym}} x_1$ en $\sum_{\text{sym}} x_1^3 \geq \sum_{\text{sym}} 1/x_1$ bewijzen. Door in de eerste ongelijkheid de rechterkant met $\sqrt{x_1x_2x_3x_4}$ te vermenigvuldigen en links met $\sqrt{1}$ krijgen we de ongelijkheid $\sum_{\text{sym}} x_1^3 \geq \sum_{\text{sym}} x_1^{3/2}x_2^{1/2}x_3^{1/2}x_4^{1/2}$ die geldt wegens Muirhead. Net zo zien we in de tweede ongelijkheid na vermenigvuldiging rechts met $x_1x_2x_3x_4$ en links met 1 dat $\sum_{\text{sym}} x_1^3 \geq \sum_{\text{sym}} x_1x_2x_3$ geldt wegens Muirhead. $\diamond$

Opgave 6.4 Gegeven dat $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, laat zien dat

$$-\frac{1}{2} \leq ab + bc + ca \leq 1.$$

Opgave 6.5 (Iran 1998) Laat x_1, x_2, x_3 en x_4 positieve reële getallen zijn zodat $x_1x_2x_3x_4 = 1$. Bewijs dat

$$\sum_{i=1}^{4} x_i^3 \geq \max\left\{\sum_{i=1}^{4} x_i, \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{x_i}\right\}.$$

Opgave 6.6 (Azie en Pacifisch gebied 1998) Laat a, b en c positieve reële getallen zijn. Bewijs dat

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right) \geq 2\left(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right).$$

Opgave 6.7 (IMO 1995) a, b en c zijn positieve reële getallen waarvoor geldt $abc = 1$. Bewijs dat

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

7 Overige trucs

7.1 Ongelijkheden met behulp van zijdes van een driehoek

Als je een ongelijkheid hebt in de zijdes van een driehoek a, b en c, dan betekent dat dat je de ongelijkheden $a < b + c$, $b < c + a$ en $c < a + b$ mag gebruiken. Dit werkt echter nogal lastig en het is dan ook vaak makkelijker om in plaats hiervan $a = z + y$,$b = x + z$ en $c = y + x$ te substitueren. De driehoeksvergelijkingen betekenen dan slechts dat $x, y, z > 0$, wat veel makkelijker werkt.

Opgave 7.1 De zijden van een driehoek hebben lengte a,b en c. De omtrek van die driehoek is 2. Bewijs

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc < 2.$$

Opgave 7.2 De zijden van een driehoek hebben lengte a, b en c. Bewijs dat

$$\frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{c+a-b} + \frac{1}{a+b-c} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Opgave 7.3 Laat a, b en c de zijdes van een driehoek zijn. Toon aan dat

$$ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2 \leq 2(ab + bc + ca).$$

Opgave 7.4 Als a, b en c de zijdes van een driehoek zijn, toon aan dat er ook een driehoek bestaat met zijdes $1/(a + b)$, $1/(b + c)$ en $1/(c + a)$.

Opgave 7.5 (Tsjechie en Slowakije 1998) Laat a, b en c positieve reële getallen zijn. Laat zien dat er een driehoek bestaat met zijdes a, b en c dan en slechts dan als er reële getallen x, y en z bestaan zodat

$$\frac{y}{x} + \frac{z}{y} = \frac{a}{x}, \quad \frac{z}{x} + \frac{x}{z} = \frac{b}{y}, \quad \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{c}{z}.$$

Opgave 7.6 (IMO 1964) Neem aan dat a, b en c de zijdes van een driehoek zijn. Bewijs dat

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c) \leq 3abc.$$

Opgave 7.7 (IMO 1983) Van een driehoek zijn de lengtes van de zijden a, b en c. Bewijs dat

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a) \geq 0.$$

7.2 Tangens substitutie

Aangezien $\tan(a)\tan(b)\tan(c) = \tan(a)+\tan(b)+\tan(c)$ als a, b en c de hoeken van een driehoek zijn kun je als de voorwaarde $x+y+z = xyz$ in een opgave gegeven wordt x, y en z vervangen door tangensen van hoeken van een driehoek.

Opgave 7.8 (Korea 1998) Voor positieve reële getallen a, b en c met $a+b+c = abc$ bewijs dat

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \leq \frac{3}{2}$$

en bepaal wanneer gelijkheid geldt.

8 Verschillende problemen

Opgave 8.1 (Bulgarije 1997) Laat a, b en c positieve getallen zijn met $abc = 1$. Bewijs dat

$$\frac{1}{1+a+b}+\frac{1}{1+b+c}+\frac{1}{1+c+a} \leq \frac{1}{2+a}+\frac{1}{2+b}+\frac{1}{2+c}.$$

Opgave 8.2 (Iran 1998) Laat $x, y, z > 1$ en $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = 2$. Bewijs dat

$$\sqrt{x+y+z} \geq \sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}.$$

Opgave 8.3 (VS 1998) Laat $a_0, a_1, \ldots, a_n$ getallen zijn uit het open interval $(0, \pi/2)$ zodat

$$\tan(a_0-\frac{\pi}{4})+\tan(a_1-\frac{\pi}{4})+\cdots\tan(a_n-\frac{\pi}{4}) \geq n-1.$$

Bewijs dat

$$\tan(a_0)\tan(a_1)\cdots\tan(a_n) \geq n^{n+1}.$$

Opgave 8.4 (Oostenrijk-Polen 1998) Laat m en n positieve gehele getallen zijn. Bewijs

$$\sum_{k=1}^{n} \lfloor \sqrt[k^2]{k^m} \rfloor \leq n+m(2^{m/4}-1).$$

Opgave 8.5 (Balkan 1998) Als $n \geq 2$ een geheel getal is en $0 < a_1 < a_2 < cdots < a_{2n+1}$ reële getallen, bewijs dan dat

$$\sqrt[n]{a_1}-\sqrt[n]{a_2}+\cdots-\sqrt[n]{a_{2n}}+\sqrt[n]{a_{2n+1}} < \sqrt[n]{a_1-a_2+a_3-\cdots-a_{2n}+a_{2n+1}}.$$