Ongelijkheden groep 1

Cauchy-Schwarz

Trainingsdag 2 (Transtrend), 6 maart 2009

Cauchy-Schwarz Voor reële getallen $x_1, \dots, x_n$ en $y_1, \dots, y_n$ geldt:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$$

met gelijkheid dan en slechts dan als er een reëel getal λ is zodat $x_i = \lambda y_i$ voor $i = 1, 2, \dots, n$, of $y_i = 0$ voor $i = 1, 2, \dots, n$.

Gevolg van Cauchy-Schwarz Voor reële getallen x_1, x_2, $\dots$, x_n, y_1, y_2, $\dots$, y_n geldt

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}.$$

Dit volgt direct uit Cauchy-Schwarz door links en rechts de wortel te trekken en daarna te gebruiken dat

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \ge \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

We bewijzen Cauchy-Schwarz pas helemaal aan het einde van deze hand-out. Eerst gaan we eens kijken hoe we de stelling kunnen toepassen. Het is in de volgende opgaven elke keer de kunst om de x_i'tjes en y_i'tjes handig te kiezen. Soms moet je voor of na het toepassen van Cauchy-Schwarz ook nog een andere stap doen (herschrijven of een andere ongelijkheid toepassen). Kijk altijd goed welke kant het ongelijkheidsteken op staat; dit kan je een hint geven over hoe je x_i en y_i moet kiezen.

Je mag behalve de originele formulering van Cauchy-Schwarz ook zonder bewijs het gevolg toepassen. Meestal wordt ook die formulering gewoon Cauchy-Schwarz genoemd.

Voorbeeld. Laat a, b, c, d, e en f niet-negatieve reële getallen zijn met $d + e + f = 1$. Bewijs dat

$$\frac{a^2}{d} + \frac{b^2}{e} + \frac{c^2}{f} \ge (a + b + c)^2.$$

Uitwerking. We passen Cauchy-Schwarz toe op de rijtjes $(\sqrt{\frac{a^2}{d}}, \sqrt{\frac{b^2}{e}}, \sqrt{\frac{c^2}{f}})$ en $(\sqrt{d}, \sqrt{e}, \sqrt{f})$.

Merk op dat d, e en f niet-negatief zijn, zodat we wortels mogen trekken. We krijgen

$$\left(\frac{a^2}{d}+\frac{b^2}{e}+\frac{c^2}{f}\right)(d+e+f)\geq\left(\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}+\sqrt{c^2}\right).$$

Omdat ook a, b en c niet-negatief zijn, is de rechterkant gelijk aan $(a+b+c)^2$. Als we nu gebruiken dat $d+e+f=1$, krijgen we precies het gevraagde. $\square$

Opgave 1 *Laat a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n niet-negatieve reële getallen zijn. Bewijs dat*

$$(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2\leq(a_1+a_2+\cdots+a_n)(a_1b_1^2+a_2b_2^2+\cdots+a_nb_n^2).$$

Opgave 2 *Laat a_1, a_2, ..., a_n positieve reële getallen zijn. Bewijs dat*

$$a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_na_1\leq a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2.$$

Opgave 3 *Laat x, y, z en w positieve reële getallen zijn. Bewijs dat*

$$\sqrt{xy}+\sqrt{zw}\leq\sqrt{(x+z)(y+w)}.$$

Opgave 4 *Laat a, b en c reële getallen zijn met $a^2+b^2+c^2=1$. Bewijs dat*

$$a\sqrt{b^2+c^2}+b\sqrt{c^2+a^2}+c\sqrt{a^2+b^2}\leq\sqrt{2}.$$

Opgave 5 (Ongelijkheid van het kwadratisch en rekenkundig gemiddelde) *Laat x_1, x_2, ..., x_n niet-negatieve reële getallen zijn. Bewijs dat*

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\leq\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}}.$$

Opgave 6 *Laat $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (met $n\geq 1$) positieve reële getallen zijn, zodat $a_1+a_2+\cdots+a_n=1$. Bewijs dat*

$$\sqrt{n}\geq\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\ldots+\sqrt{a_n}.$$

Opgave 7 *Laat a, b en c positieve reële getallen zijn met $a+b+c=1$. Bewijs dat*

$$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}\leq\sqrt{21}.$$

Opgave 8 *Laat a, b, c en d positieve reële getallen zijn met $a+b+c+d=1$. Bewijs dat*

$$\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+d}+\frac{d^2}{d+a}\geq\frac{1}{2}.$$

Opgave 9 *Laat a, b en c reële getallen zijn. Bewijs dat*

$$\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{3}+\frac{c}{6}\right)^2\leq\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{3}+\frac{c^2}{6}.$$

Opgave 10 *Laat x, y en z reële getallen zijn, groter dan 1 en zo dat $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$. Bewijs dat*

$$\sqrt{x+y+z}\geq\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}.$$

Opgave 11 *Zij $n\geq 2$ een positief geheel getal en laat $x_1,y_1,x_2,y_2,\ldots,x_n,y_n$ positieve reële getallen zijn zodat $x_1+x_2+\cdots+x_n\geq x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$. Bewijs dat*

$$x_1+x_2+\cdots+x_n\leq\frac{x_1}{y_1}+\frac{x_2}{y_2}+\cdots+\frac{x_n}{y_n}.$$

Opgave 12 *Laat w, x, y en z reële getallen zijn die voldoen aan $w+x+y+z=0$ en $w^2+x^2+y^2+z^2=1$. Bewijs dat*

$$-1\leq wx+xy+yz+zw\leq 0.$$

Een bewijs van Cauchy-Schwarz

In de volgende opgaven ga je de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz bewijzen. Let op dat je nu niet meer de stelling mag gebruiken (zoals in de voorgaande opgaven)!

Opgave 13 *Laat a_1, a_2, b_1, b_2 reële getallen zijn, met $b_1,b_2>0$. Bewijs dat*

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}\geq\frac{(a_1+a_2)^2}{b_1+b_2}.$$

met gelijkheid dan en slechts dan als er een reëel getal λ is zodat $a_i=\lambda b_i$ voor $i=1,2$.

Opgave 14 *Zij $n \geq 2$ een geheel getal. Laat $a_1, a_2, \dots, a_n$ reële getallen zijn en laat $b_1, b_2, \dots, b_n$ positieve reële getallen zijn. Bewijs dat*

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n},$$

met gelijkheid dan en slechts dan als er een reëel getal λ is zodat $a_i = \lambda b_i$ voor $i = 1, 2, \dots, n$.
(Hint: gebruik inductie en pas opgave 13 toe.)

Opgave 15 *Bewijs de stelling van Cauchy-Schwarz met behulp van opgave 14 voor het geval dat $y_i \neq 0$ voor alle i.*

Opgave 16 *Bewijs ten slotte de stelling van Cauchy-Schwarz voor het geval dat er een of meer y_i gelijk aan 0 zijn.*
(Hint: gebruik opgave 15.)

Nog een bewijs

Hier nog een ander bewijs van de stelling van Cauchy-Schwarz, om eens rustig thuis door te lezen.

Bewijs: Als alle y_i gelijk aan nul zijn, geldt de ongelijkheid. Er geldt in dat geval zelfs gelijkheid. Met $\lambda = 0$ zien we dat $y_i = \lambda x_i$ voor alle $i = 1, 2, \dots, n$.

We gaan er nu verder van uit dat niet alle y_i gelijk aan nul zijn. Zeg $y_{i_0} \neq 0$. Voor de gegeven parameters $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ beschouwen we de functie $p(t) = \sum_{i=1}^n (x_i - ty_i)^2$. Dit is een som van kwadraten, dus geldt $p(t) \geq 0$ met gelijkheid dan en slechts dan als $x_i = ty_i$ voor alle i. Merk op dat er hooguit één zo'n t is, bepaald door $t = t_0 = \frac{x_{i_0}}{y_{i_0}}$.

We schrijven $p(t)$ in de vorm $at^2 + bt + c$:

$$p(t) = \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2tx_iy_i + t^2y_i^2) = \left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right) t^2 - 2\left(\sum_{i=1}^n x_iy_i\right) t + \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right).$$

Wegens $(\sum_{i=1}^n y_i^2) \geq y_{i_0}^2 > 0$ is dit een dalparabool. Deze heeft discriminant

$$D = b^2 - 4ac = 4\left(\sum_{i=1}^n x_iy_i\right)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right).$$

Het feit dat $\forall t : p(t) \geq 0$ met hooguit in $t = t_0$ gelijkheid, betekent dat er nul of één snijpunt met de t-as is. Dat laat zich nu vertalen in $D < 0$ of $D = 0$. Dus

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right).$$

Er treedt gelijkheid op precies dan als $D = 0$, dus precies dan als $(x_1, \ldots, x_n) = t(y_1, \ldots, y_n)$ voor zekere t. $\square$