

Getaltheorie groep 1

Trainingsweekend november 2008

Deel 1: priemgetallen

Definitie: Een getal dat groter is dan 1 en dat alleen maar deelbaar is door 1 en zichzelf, heet een **priemgetal**. Een getal groter dan 1 dat deelbaar is door meer getallen dan 1 en zichzelf heet **samengesteld**.

Opgave 1 Voor welke m en n is $m^2 - n^2$ priem?

Opgave 2 Bewijs dat $\frac{n}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{6}$ geheel is voor alle natuurlijke getallen n .

Opgave 3 Bewijs dat er 50 opeenvolgende natuurlijke getallen zijn die allemaal samengesteld zijn.

Opgave 4 Vind alle priemgetallen p en q waarvoor geldt $p^2 - 2q^2 = 1$.

Opgave 5 Bepaal op hoeveel nullen $1000!$ eindigt.

Opgave 6 Zij $p > 3$ een priemgetal. Bewijs dat $p^2 - 1$ deelbaar is door 24 .

Opgave 7 Hoe vaak komt de priemfactor 2 voor in $(n + 1)(n + 2) \cdots (2n)$?

Belangrijke onderdelen deel 2:

- Als p een priemgetal is en $p \mid ab$, dan $p \mid a$ of $p \mid b$.
- Uit $a \mid b$ en $a \mid c$ volgt $a \mid b + c$ en $a \mid b - c$.
- De grootste gemene deler van twee getallen is het grootste getal waar ze allebei door deelbaar zijn.
- $\text{ggd}(a, b) = \text{ggd}(a, b - a)$

Opgave 8 *Stel dat voor positieve gehele getallen a, b, c en d geldt dat $a - c \mid ab + cd$. Bewijs dat $a - c \mid ad + bc$.*

Opgave 9 *Bewijs dat voor alle positieve gehele getallen n geldt dat $a - b \mid a^n - b^n$ voor alle positieve gehele getallen a en b waarvoor geldt dat $a \neq b$.*

Opgave 10 *Vind alle n waarvoor geldt $a + b \mid a^n + b^n$, voor alle natuurlijke a en b met $a + b \neq 0$. Vind ook alle n waarvoor geldt $a + b \mid a^n - b^n$, voor alle natuurlijke a en b met $a + b \neq 0$.*

Opgave 11 *Bewijs dat in elke verzameling van $n + 1$ getallen uit $\{1, 2, \dots, 2n\}$ er twee getallen a en b zijn waarvoor geldt $\text{ggd}(a, b) = 1$.*

Opgave 12 *Bewijs dat $\text{ggd}(2k + 1, k + 6) = 1$ als k niet van de vorm $11n + 5$ is.*

Opgave 13 *Bewijs dat de breuk $\frac{21n+4}{14n+3}$ voor geen enkel geheel getal n te vereenvoudigen is.*

Opgave 14 *Laat a en b positieve gehele getallen zijn waarvoor geldt $a \mid b^2, b^2 \mid a^3, a^3 \mid b^4, b^4 \mid a^5, \dots$. Bewijs dat $a = b$.*