Inductie groep 1

Trainingsweekend november 2008

Volledige inductie: Volledige inductie is een methode om te bewijzen dat een bepaalde bewering $B(n)$ die afhangt van een geheel getal $n \geq n_0$ voor alle gehele getallen $n \geq n_0$ waar is. De methode is als volgt:
Inductiebasis Ga na dat $B(n_0)$ waar is.
Inductiestap Ga na dat voor iedere $k \geq n_0$ geldt: als $B(k)$ waar is ('de inductie aanname') dan is $B(k+1)$ ook waar.

Voorbeeld Vind en bewijs met volledige inductie een formule voor de som van de eerste n oneven getallen (d.w.z. 1, 1 + 3, 1 + 3 + 5 . . .).
Bewijs
We kijken eerst wat gebeurt voor een paar kleine waarden van n.

$$\begin{aligned} n = 1 &: 1 = 1^2 \\ n = 2 &: 1 + 3 = 4 = 2^2 \\ n = 3 &: 1 + 3 + 5 = 3^2 \end{aligned}$$

Blijkbaar is de som van de eerste n oneven getallen gelijk aan n^2. We proberen nu met volledige inductie te bewijzen dat

$$1 + 3 + ... + (2n - 1) = n^2. \tag{1}$$

Inductiebasis Voor $n = 1$ hebben we al gezien dat $1 = 1^2$.
Inductiestap Stel dat voor zekere $n = k$ formule (1) geldt, dus stel dat

$$1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) = k^2. \tag{2}$$

We willen bewijzen dat

$$1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2.$$

We herschrijven de linker kant van deze formule met behulp van (2) als volgt:

$$1 + 3 + ... + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + (2k + 1) = (k + 1)^2.$$

We zien dus dat de formule klopt ook voor $n = k + 1$, en daarmee is de inductiestap bewezen.
Conclusie Het volgt uit het principe van volledige inductie dat voor elke $n \in \mathbb{N}$ geldt dat $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$.

Opgave 1 *Bewijs met behulp van inductie dat* $1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Opgave 2 *Bewijs dat voor alle* $n \in \mathbb{N}$*,* $n \geq 2$*, geldt*

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - .... + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \geq \frac{13}{24} \tag{3}$$

Opgave 3 *Bewijs dat voor alle* $n \in \mathbb{N}$*, en* $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ *,*

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1} = \frac{a^n - 1}{a - 1}.$$

Definieer de rij Fibonacci-getallen als volgt: $F_1 = F_2 = 1$ en voor $n \in \mathbb{N}$: $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Hier staan de eerste 10 getallen uit de rij:

F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

Opgave 4 *Bewijs dat voor alle* $n \in \mathbb{N}$ *geldt* $\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$*.*

Opgave 5 *Bewijs dat voor alle* $n \in \mathbb{N}$ *geldt* $\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}$*.*

Opgave 6 *Bewijs dat voor alle* $n \in \mathbb{N}$ *geldt dat*

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} = \frac{(n+1)! - 1}{(n+1)!}.$$

Opgave 7 "Bewijs dat voor alle $n \geq 2$ het volgende geldt: elk n-tal punten in het platte vlak ligt op een lijn."
Iemand geeft het volgende bewijs:
Inductiebasis: voor $n = 2$ is het waar; 2 punten liggen altijd op een lijn.
Inductiestap: stel het geldt voor $n = k$. Zij nu gegeven een $k+1$ aantal punten $P_1, \ldots, P_{k+1}$. De eerste k punten $(P_1, \ldots, P_k)$ liggen per inductiehypothese op een lijn, en ook de laatste k punten $(P_2, \ldots, P_{k+1})$ liggen op een lijn. Maar die lijn is in beide gevallen de lijn P_2P_k. Dus alle $k + 1$ punten liggen op deze lijn. *De bewering is echter onwaar; van drie punten weten we al dat ze niet op een lijn hoeven te liggen. Er gaat dus iets fout in dit inductiebewijs. Waar gaat er iets fout?*

Opgave 8 *Teken n lijnen in het vlak. Bewijs dat de gebieden die op deze manier ontstaan gekleurd kunnen worden met rood en blauw zodat geen twee aan elkaar grenzende gebieden dezelfde kleur hebben.*

Opgave 9 *Bewijs dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt dat $3^{2n+1} + 2^{n-1}$ deelbaar is door 7.*

Opgave 10 *Bewijs dat voor alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $n! - 1$ geschreven kan worden als de som van $n - 1$ delers van $n!$.*

Opgave 11 *Bewijs dat voor alle reële getallen $x, y > 0$ en voor alle $n \geq 1$ geldt dat $(x + y)^n \leq 2^{n-1}(x^n + y^n)$.*

Varianten op inductie
Soms is de geldigheid van de bewering $B(n)$ voor $n = n_0$ en voor $n = k$ niet genoeg om de bewering voor $n = k + 1$ te bewijzen. Een van de volgende varianten van inductie zou dan van pas kunnen komen:

Twee stappen inductie
Inductiebasis Ga na dat $B(n_0)$ en $B(n_0 + 1)$ waar zijn.
Inductiestap Bewijs dat voor elke $n = k$, $k \geq n_0$, geldt: als $B(k)$ en $B(k + 1)$ waar zijn, dan is $B(k + 2)$ ook waar.

Meer stappen inductie
Inductiebasis Ga na dat $B(n_0)$ waar is.
Inductiestap Ga na dat voor elke $k \geq n_0$ geldt: als $B(n_0)$,...,$B(k)$ waar zijn, dan is $B(k+1)$ ook waar.

Voorbeeld twee stappen inductie

Zij x een reëel getal zodat $x + \frac{1}{x}$ een geheel getal is. Bewijs dat voor alle $n \geq 1$ ook $x^n + \frac{1}{x^n}$ een geheel getal is.

Inductiebasis: voor $n = 1$ is het al gegeven.
Voor $n = 2$: $x + \frac{1}{x}$ is geheel dus ook $(x + \frac{1}{x})^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$, dus ook $x^2 + \frac{1}{x^2}$.
Inductiestap: Veronderstel dat voor elke $k \geq 1$, $x^k + \frac{1}{x^k}$ en $x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}}$ gehele getallen zijn.
We willen bewijzen dat ook $x^{k+2} + \frac{1}{x^{k+2}}$ een geheel getal is.
Merk op dat

$$(x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}})(x + \frac{1}{x}) = x^{k+2} + x^k + \frac{1}{x^k} + \frac{1}{x^{k+2}}.$$

dus

$$x^{k+2} + \frac{1}{x^{k+2}} = (x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}})(x + \frac{1}{x}) - x^k - \frac{1}{x^k}.$$

Het volgt nu uit de inductie hypothese dat $x^{k+2} + \frac{1}{x^{k+2}}$ ook een geheel getal is.

Opgave 12 *Vind alle rijen positieve reële getallen $a_1, a_2, a_3, a_4 \ldots$. waarvoor geldt dat*

$$\frac{a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots + ka_k}{a_1 + a_2 + \ldots + a_k} = \frac{k+1}{2}.$$

voor alle $k \in \mathbb{N}$.

Opgave 13 *Voor een rij van getallen geldt:*
$x_0 = 1$
$x_1 = 2$
$x_{n+1} = \sqrt{x_n + 6\sqrt{x_{n-1}}}$.
Vind een expliciete formule voor x_n en bewijs die met volledige inductie.

Opgave 14 *Het Waterpistolengevecht*
Stel we hebben een oneven aantal mensen die we elk een goed gevuld waterpistool geven. Daarna zetten we deze mensen met z'n allen in een grasveld. We zorgen er daarbij voor dat hun afstanden verschillen. Voor elke persoon zijn de afstanden van alle anderen tot hem of haar verschillend. Als we een teken geven mogen ze allemaal beginnen te schieten. Het blijkt dat iedereen begint te schieten op degene die het dichtst bij hem staat.
Bewijs dat er dan altijd iemand is die helemaal droog blijft.....

Opgave 15 *Gegeven zijn $2n$ punten in de ruimte ($n \geq 2$). Er zijn $n^2 + 1$ paren punten verbonden door een lijnstuk. Laat zien dat er een drietal punten is die onderling allemaal verbonden zijn.*

Opgave 16 *Definieer de rij a_n als volgt: $a_0 = 9$ en $a_{n+1} = 3a_n^4 + 4a_n^3$ voor $n \geq 0$. Bewijs voor alle $n \geq 0$ dat a_n eindigt op (minstens) 2^n negens.*