

Vorige week zagen we:

- Wat een lineair programmeringsmodel is.
- Hoe, in het geval er slechts twee beslissingsvariabelen zijn, met de grafische methode een optimale oplossing gevonden kan worden.
- Wat een standaard lineair programmeringsmodel is en hoe een willekeurig lineair programmeringsmodel omgezet kan worden in standaard vorm.

Nu: een methode om een optimale oplossing te vinden voor LP modellen met meer dan twee beslissingsvariabelen.

- Vandaag voor éénvoudige LP modellen.
- Volgende week voor willekeurig LP modellen.

Eenvoudige lineaire programmeringsmodellen

$$\begin{array}{ll} \text{maximaliseer } Z = & c^T x \\ \text{o.d.v.} & \sum_{j=1}^m a_{i,j} x_j \leq b_i \text{ voor } i = 1, \dots, n \\ & x_j \geq 0 \text{ voor } j = 1, \dots, m \end{array}$$

waarbij $b_i \geq 0$ voor $i = 1, \dots, n$.

- Doelstelling is maximaliseer.
- Alle functionele restricties zijn \leq -restricties met $b_i \geq 0$.
- Elke beslissingsvariabele heeft een niet-negativiteitsrestrictie.

Voorbeeld eenvoudige LP model

$$\begin{array}{rcll} \text{maximaliseer } Z & = & 3x_1 & +5x_2 \\ \text{o.d.v.} & & x_1 & \leq 4 \\ & & & 2x_2 \leq 12 \\ & & 3x_1 & +2x_2 \leq 18 \\ & & x_1, & x_2 \geq 0 \end{array}$$

Breng dit in standaard vorm. We voegen slackvariabelen toe aan de functionele restricties.

$$\begin{array}{rcllcl} \text{maximaliseer } Z & = & 3x_1 & +5x_2 & & \\ \text{o.d.v.} & & x_1 & & +s_1 & = 4 \\ & & & 2x_2 & & +s_2 = 12 \\ & & 3x_1 & +2x_2 & & +s_3 = 18 \\ & & x_1, & x_2, & s_1, & s_2, & s_3 \geq 0 \end{array}$$

Ruwe schets van de simplex methode

- Vind een toegelaten oplossing.
 - ▶ Makkelijk te vinden voor eenvoudige LP modellen.
 - ▶ Moeilijker voor willekeurige LP modellen. Volgende week.
- Voer verbetering stappen uit totdat je niet meer verder kan. Je hebt een optimale oplossing gevonden.

Een toegelaten oplossing vinden

$$\begin{array}{rcll} \text{maximaliseer} & Z & & \\ \text{o.d.v.} & Z & -3x_1 & -5x_2 & = & 0 \\ & & x_1 & & +s_1 & = & 4 \\ & & & 2x_2 & & +s_2 & = & 12 \\ & & 3x_1 & +2x_2 & & & +s_3 & = & 18 \\ & & x_1, & x_2, & s_1, & s_2, & s_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Een toegelaten oplossing in dit geval is eenvoudig af te lezen: $s_1 = 4$, $s_2 = 12$, $s_3 = 18$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$.

Verbetering stap

$$\begin{array}{rcccccc} Z & -3x_1 & -5x_2 & & & = & 0 \\ & x_1 & & +s_1 & & = & 4 \\ & & 2x_2 & & +s_2 & = & 12 \\ & 3x_1 & +2x_2 & & +s_3 & = & 18 \\ & x_1, & x_2, & s_1, & s_2, & s_3 & \geq 0 \end{array}$$

Als $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $s_1 = 4$, $s_2 = 12$ en $s_3 = 18$, dan is $Z = 0$.

- We kunnen x_2 groter maken, maar dan moeten we s_2 en s_3 verlagen. Hoeveel kunnen we x_2 groter maken zonder dat s_2 en s_3 negatief worden?
 - ▶ Uit $2x_2 + s_2 = 12$ volgt dat x_2 ten hoogste 6 mag worden.
 - ▶ Uit $3x_1 + 2x_2 + s_3 = 18$ volgt dat x_2 ten hoogste 9 mag worden.
 - ▶ Het minimum van 6 en 9 is 6.
- We kunnen x_2 niet groter maken dan 6. Als $x_2 = 6$, dan wordt $s_2 = 0$ en $s_3 = 6$.

We hebben nu $x_1 = 0$, $x_2 = 6$, $s_1 = 4$, $s_2 = 0$, $s_3 = 6$ en $Z = 30$.

Wat gebeurt er algebraïsch?

We hebben:

$$\begin{array}{rcccccc} Z & -3x_1 & -5x_2 & & & & = & 0 \\ & x_1 & & +s_1 & & & = & 4 \\ & & 2x_2 & & +s_2 & & = & 12 \\ & 3x_1 & +2x_2 & & & +s_3 & = & 18 \\ & x_1, & x_2, & s_1, & s_2, & s_3 & \geq & 0 \end{array}$$

De derde vergelijking delen door 2 geeft $x_2 + \frac{1}{2}s_2 = 6$. Substitutie van $x_2 = 6 - \frac{1}{2}s_2$ in de eerste, tweede en vierde vergelijking geeft

$$\begin{array}{rcccccc} Z & -3x_1 & & & 2\frac{1}{2}s_2 & & = & 30 \\ & x_1 & & +s_1 & & & = & 4 \\ & & x_2 & & +\frac{1}{2}s_2 & & = & 6 \\ & 3x_1 & & & -s_2 & +s_3 & = & 6 \\ & x_1, & x_2, & s_1, & s_2, & s_3 & \geq & 0 \end{array}$$

We kunnen aflezen dat $x_1 = 0$, $x_2 = 6$, $s_1 = 4$, $s_2 = 0$ en $s_3 = 6$ een toegelaten oplossing is met $Z = 30$. **Eén stap verbetering.**

We plaatsen

$$\begin{array}{rcccccccl} Z & -3x_1 & -5x_2 & & & & & = & 0 \\ & x_1 & & +s_1 & & & & = & 4 \\ & & 2x_2 & & +s_2 & & & = & 12 \\ & 3x_1 & +2x_2 & & & +s_3 & & = & 18 \\ & x_1, & x_2, & s_1, & s_2, & s_3 & \geq & 0 \end{array}$$

in een tableau:

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
Z	1	-3	-5	0	0	0	0
s_1	0	1	0	1	0	0	4
s_2	0	0	2	0	1	0	12
s_3	0	3	2	0	0	1	18

Zo'n tableau wordt een **simplex tableau** genoemd en bevat dezelfde informatie als bovenstaande gelijkheden en niet-negativiteits restricties, maar scheelt ons veel schrijfwerk.

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
Z	1	-3	-5	0	0	0	0
s_1	0	1	0	1	0	0	4
s_2	0	0	2	0	1	0	12
s_3	0	3	2	0	0	1	18

- De variabelen aan de linkerkant worden de **basisvariabelen** van dit simplextableau genoemd. (Hier zijn het s_1 , s_2 en s_3 .) De verzameling van basisvariabelen wordt de **basis** van dit tableau genoemd. We zien **eenheidsvectoren** in de kolommen van basisvariabelen. De waarde van de basisvariabelen kunnen we aflezen door naar de rechterzijde van het tableau te kijken.
- De andere variabelen worden de **niet-basisvariabelen** van dit simplextableau genoemd. (Hier zijn het x_1 en x_2 .) **Niet-basisvariabelen hebben altijd waarde 0.**
- De toegelaten oplossing wordt een **toegelaten basisoplossing** genoemd. (Hier: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $s_1 = 4$, $s_2 = 12$ en $s_3 = 18$ is een toegelaten basisoplossing.)

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
Z	1	-3	-5	0	0	0	0
s_1	0	1	0	1	0	0	4
s_2	0	0	2	0	1	0	12
s_3	0	3	2	0	0	1	18

- In de rij van Z staan de getallen -3 , -5 , 0 , 0 en 0 . Dit worden de **gereduceerde kostencoëfficiënten** van dit simplextableau genoemd. De gereduceerde kostencoëfficiënten van basisvariabelen zijn **altijd 0**.
- Er zijn **negatieve gereduceerde kostencoëfficiënten**, dus de toegelaten oplossing is **niet optimaal**.

Altijd even controleren!

De kolommen van de basisvariabelen zijn eenheidsvectoren. Aan de rechterkant staan (behalve in rij Z) niet-negatieve getallen.

Verbetering stap

- We gaan een nieuwe simplextableau maken, waaruit we een betere toegelaten basisoplossing kunnen aflezen.
- We halen één variabele uit de basis (uittredende variabele) en stoppen er een nieuwe in (intredende variabele).

Minimum ratio test

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
Z	1	-3	-5	0	0	0	0
s_1	0	1	0	1	0	0	4
s_2	0	0	2	0	1	0	12
s_3	0	3	2	0	0	1	18

- De gereduceerde kostencoëfficiënt van x_2 is -5 . Negatief, dus nog niet optimaal.
- x_2 wordt de **intredende** variabele. Deze komt in de basis.
- Voer de **minimum ratio test** uit:
 - ▶ Voor elke rij neem de rechterzijde constante en deel het door het element in de x_2 -kolom, **indien het positief** is. Neem het minimum hierover. Dit bepaalt de **uittredende** variabele. In dit geval is het s_2 . Deze gaat de basis uit.
- We hebben een nieuwe basis. In ons geval s_1, x_2, s_3 .

- De kolom van de intredende variabele wordt de pivot kolom genoemd. De rij van de uittredende variabele wordt de pivot rij genoemd. Het element dat in de pivot kolom en pivot rij zit wordt het pivot element genoemd.
- We hebben een nieuwe basis. We moeten de matrix van de kolommen van de basisvariabelen de **eenheidsmatrix maken (tot op permutatie)**.
- Voer rij operaties uit om dat te bereiken.

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
Z	1	-3	-5	0	0	0	0
s_1	0	1	0	1	0	0	4
s_2	0	0	2	0	1	0	12
s_3	0	3	2	0	0	1	18

Na het uitvoeren van rij operaties krijgen we:

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
Z	1	-3	0	0	$2\frac{1}{2}$	0	30
s_1	0	1	0	1	0	0	4
x_2	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
s_3	0	3	0	0	-1	1	6

De toegelaten basisoplossing bij dit tableau is $s_1 = 4$, $x_2 = 6$, $s_3 = 6$, $x_1 = 0$ en $s_2 = 0$ met $Z = 30$. Er zijn nog negatieve gereduceerde kostencoëfficiënten, dus we hebben nog niet een optimale oplossing gevonden.

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
Z	1	-3	0	0	$2\frac{1}{2}$	0	30
s_1	0	1	0	1	0	0	4
x_2	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
s_3	0	3	0	0	-1	1	6

- We zien dat x_1 een negatieve kostencoëfficiënt heeft. We maken x_1 de intredende variabele.
- Minimum ratio test: neem de rij i waarvoor $a_{i,x_1} > 0$ en $\frac{b_i}{a_{i,x_1}}$ minimal is.

- ▶ Rij s_1 geeft $\frac{b_{s_1}}{a_{s_1,x_1}} = \frac{4}{1} = 4$.

- ▶ Rij x_2 moeten we overslaan want a_{x_2,x_1} is niet positief.

- ▶ Rij s_3 geeft $\frac{b_{s_3}}{a_{s_3,x_1}} = \frac{6}{3} = 2$.

Het minimum is 2. We nemen rij s_3 .

- Als uittredende variabele nemen we s_3 .

Het volgende simplextableau wordt

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
Z	1	0	0	0	$1\frac{1}{2}$	1	36
s_1	0	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2
x_2	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
x_1	0	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	2

Er zijn geen negatieve gereduceerde kostencoëfficiënten, dus we hebben een optimale oplossing gevonden. We lezen af dat $x_1 = 2$, $x_2 = 6$, $s_1 = 2$, $s_2 = 0$ en $s_3 = 0$ een optimale oplossing is met optimale waarde $Z = 36$.

We zagen dat $x_1 = 2$, $x_2 = 6$, $s_1 = 2$, $s_2 = 0$ en $s_3 = 0$ een optimale oplossing is van

$$\begin{array}{rcll}
 \text{maximaliseer } Z & = & 3x_1 & +5x_2 \\
 \text{o.d.v.} & & x_1 & +s_1 = 4 \\
 & & & 2x_2 +s_2 = 12 \\
 & & 3x_1 & +2x_2 +s_3 = 18 \\
 & & x_1, & x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0
 \end{array}$$

met optimale waarde $Z = 36$. Voor het oorspronkelijk probleem

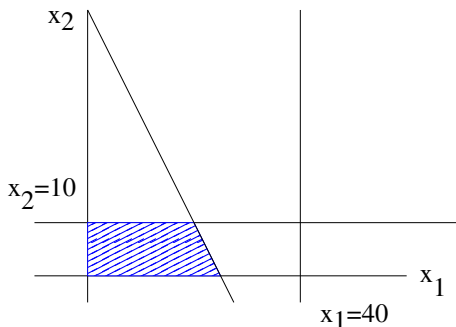
$$\begin{array}{rcll}
 \text{maximaliseer } Z & = & 3x_1 & +5x_2 \\
 \text{o.d.v.} & & x_1 & \leq 4 \\
 & & & 2x_2 \leq 12 \\
 & & 3x_1 & +2x_2 \leq 18 \\
 & & x_1, & x_2 \geq 0
 \end{array}$$

is $x_1 = 2$ en $x_2 = 6$ een optimale oplossing met optimale waarde $Z = 36$.

Een ander voorbeeld

$$\begin{array}{rcll} \text{maximaliseer } Z & = & 120x_1 & +80x_2 \\ \text{o.d.v.} & & x_1 & \leq 40 \\ & & & x_2 \leq 10 \\ & & 20x_1 & +10x_2 \leq 500 \\ & & x_1, x_2 & \geq 0 \end{array}$$

Het toegelaten gebied is:



Dit in standaard vorm brengen geeft:

$$\begin{array}{rcll}
 \text{maximaliseer} & Z & & \\
 \text{o.d.v.} & Z & -120x_1 & -80x_2 \\
 & & x_1 & +s_1 & = & 40 \\
 & & & x_2 & +s_2 & = & 10 \\
 & & 20x_1 & +10x_2 & +s_3 & = & 500 \\
 & & x_1, & x_2, & s_1, & s_2, & s_3 \geq & 0
 \end{array}$$

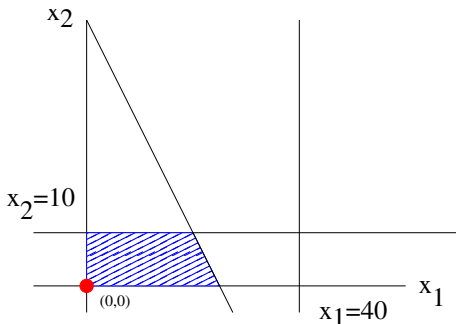
Als basisvariabelen nemen we de slackvariabelen. Het simplextableau is

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
Z	1	-120	-80	0	0	0	0
s_1	0	1	0	1	0	0	40
s_2	0	0	1	0	1	0	10
s_3	0	20	10	0	0	1	500

We lezen meteen af dat $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $s_1 = 40$, $s_2 = 10$, $s_3 = 500$ een toegelaten basisoplossing is met $Z = 0$.

$x_1 = 0$ en $x_2 = 0$ is een toegelaten oplossing van

$$\begin{array}{rcll} \text{maximaliseer} & Z = & 120x_1 & +80x_2 \\ \text{o.d.v.} & & x_1 & \leq 40 \\ & & & x_2 \leq 10 \\ & & 20x_1 & +10x_2 \leq 500 \\ & & x_1, x_2 & \geq 0 \end{array}$$



We hebben

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
Z	1	-120	-80	0	0	0	0
s_1	0	1	0	1	0	0	40
s_2	0	0	1	0	1	0	10
s_3	0	20	10	0	0	1	500

Controle

We zien eenheidsvectoren onder de basisvariabelen. De gereduceerde kostencoëfficiënten van basisvariabelen zijn gelijk aan 0.

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
Z	1	-120	-80	0	0	0	0
s_1	0	1	0	1	0	0	40
s_2	0	0	1	0	1	0	10
s_3	0	20	10	0	0	1	500

- We zien dat x_1 een negatieve kostencoëfficiënt heeft. We maken x_1 de intredende variabele.
- Minimum ratio test: neem de rij i waarvoor $a_{i,x_1} > 0$ en $\frac{b_i}{a_{i,x_1}}$ minimal is.

- ▶ Rij s_1 geeft $\frac{b_{s_1}}{a_{s_1,x_1}} = \frac{40}{1} = 40$.

- ▶ Rij s_2 moeten we overslaan want a_{s_2,x_1} is niet positief.

- ▶ Rij s_3 geeft $\frac{b_{s_3}}{a_{s_3,x_1}} = \frac{500}{20} = 25$.

Het minimum is in rij s_3 .

- Als uittredende variabele nemen we s_3 .

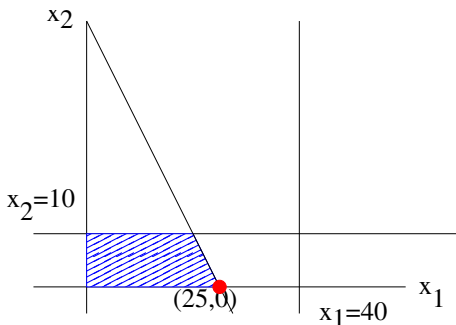
Het volgende simplextableau wordt

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
Z	1	0	-20	0	0	6	3000
s_1	0	0	$-\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{20}$	15
s_2	0	0	1	0	1	0	10
x_1	0	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{20}$	25

We lezen af dat $x_1 = 25$, $x_2 = 0$, $s_1 = 15$, $s_2 = 10$ en $s_3 = 0$ een toegelaten basisoplossing is met $Z = 3000$.

$x_1 = 25$ en $x_2 = 0$ is een toegelaten oplossing van

$$\begin{array}{rcll} \text{maximaliseer} & Z = & 120x_1 & + 80x_2 \\ \text{o.d.v.} & & x_1 & \leq 40 \\ & & & x_2 \leq 10 \\ & & 20x_1 & + 10x_2 \leq 500 \\ & & x_1, x_2 & \geq 0 \end{array}$$



	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
Z	1	0	-20	0	0	6	3000
s_1	0	0	$-\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{20}$	15
s_2	0	0	1	0	1	0	10
x_1	0	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{20}$	25

- We zien dat x_2 een negatieve kostencoëfficiënt heeft. We maken x_2 de intredende variabele.
 - Minimum ratio test: neem de rij i waarvoor $a_{i,x_2} > 0$ en $\frac{b_i}{a_{i,x_2}}$ minimal is.
 - ▶ Rij s_1 moeten we overslaan want a_{s_1,x_2} is niet positief.
 - ▶ Rij s_2 geeft $\frac{b_{s_2}}{a_{s_2,x_2}} = \frac{10}{1} = 10$.
 - ▶ Rij x_1 geeft $\frac{b_{s_3}}{a_{x_1,x_2}} = \frac{25}{1/2} = 50$.
- Het minimum is in rij s_2 .
- Als uittredende variabele nemen we s_2 .

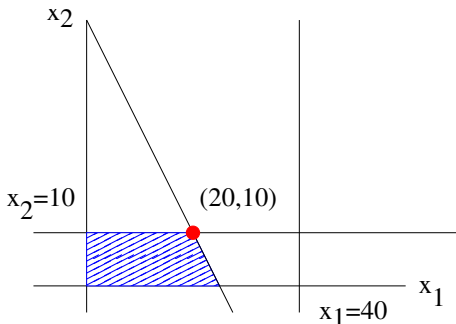
Het volgende simplextableau wordt

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
Z	1	0	0	0	20	6	3200
s_1	0	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{20}$	20
x_2	0	0	1	0	1	0	10
x_1	0	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{20}$	20

We lezen af dat $x_1 = 20$, $x_2 = 10$, $s_1 = 20$, $s_2 = 0$ en $s_3 = 0$ een toegelaten basisoplossing is met $Z = 3200$. Omdat alle gereduceerde kostencoëfficiënten niet-negatief zijn, is dit een optimale oplossing.

$x_1 = 20$ en $x_2 = 10$ is een optimale oplossing van

$$\begin{array}{rcll} \text{maximaliseer} & Z = & 120x_1 & +80x_2 \\ \text{o.d.v.} & & x_1 & \leq 40 \\ & & & x_2 \leq 10 \\ & & 20x_1 & +10x_2 \leq 500 \\ & & x_1, x_2 & \geq 0 \end{array}$$



Wat doet de simplexmethode?

De simplexmethode gaat van hoekpunt (CPF) naar hoekpunt (CPF).

Wat zijn basisvariabelen?

Definition

Elke verzameling van variabelen zodat de kolommen onder ze een basis vormt, kan een **basis** (in de simplex methode) zijn. De variabelen in de basis worden de **basisvariabelen** genoemd. De variabelen die niet in de basis zitten, worden **niet-basisvariabelen** genoemd.

Stel we hebben een basis. Maak de niet-basisvariabelen gelijk aan 0. We kunnen nu de waarden van de basisvariabelen uitrekenen. De verkregen oplossing wordt een **basisoplossing** genoemd.

Definition

Een basisoplossing waarin elke variabele niet-negatief is, wordt een **toegelaten basisoplossing** (basic feasible solution) genoemd.

Een optimale oplossing is altijd een toegelaten basisoplossing.

Onbegrensd

Minimum ratio test: Vind in de kolom van de intredende variabele x_j de rij i zodat de linkerzijde constante a_{i,x_j} **positief** en $b_i/a_{i,x_j}$ minimaal is. **Wat als er geen positieve a_{i,x_j} is?**

Onbegrensd

Als er een niet-basisvariabele is met negatieve gereduceerde kostencoëfficiënt en de kolom eronder heeft alleen maar niet-positieve elementen, dan is het lineair programmeringsmodel onbegrensd.

$$\begin{array}{rcl}
 \text{maximaliseer } Z & = & x_1 + x_2 \\
 \text{o.d.v.} & & -x_1 + 2x_2 \leq 1 \\
 & & x_2 \leq 1 \\
 & & x_1, x_2 \geq 0
 \end{array}$$

Het eerste simplextableau is:

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	b
Z	1	-1	-1	0	0	0
s_1	0	-1	2	1	0	1
s_2	0	0	1	0	1	1

De gereduceerde kostencoëfficiënten van de niet-basisvariabele x_1 is negatief en in de kolom eronder staan alleen maar niet-positieve elementen. **Onbegrensd.**

Wat als de b_i van de uittredende variabele gelijk is aan 0?

- Bij de verbetering stap wordt Z niet hoger.
- Dit is een probleem omdat de simplex methode oneindig kan lopen zonder een optimale oplossing te vinden.
- Er zijn methodes om dit probleem te omzeilen. Je hoeft deze methodes niet te kennen in dit vak.

Meerdere optimale oplossingen

Wat als alle gereduceerde kostencoëfficiënt niet-negatief zijn, maar de gereduceerde kostencoëfficiënt van een niet-basisvariabele is gelijk aan 0?

- Dan zijn er meerdere optimale oplossingen.

$$\begin{aligned}
 \text{maximaliseer } Z &= 3x_1 + 2x_2 \\
 \text{o.d.v.} & \quad 3x_1 + 2x_2 \leq 3 \\
 & \quad x_1 + 3x_2 \leq 3 \\
 & \quad x_1 - 4x_2 \leq 2 \\
 & \quad x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

Het simplextableau waarmee we starten is:

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
Z	1	-3	-2	0	0	0	0
s_1	0	3	2	1	0	0	3
s_2	0	1	3	0	1	0	3
s_3	0	1	-4	0	0	1	2

Er zijn negatieve gereduceerde kostencoëfficiënten, dus niet optimaal. We nemen x_1 als intredende variabele. Minimum ratio test verteld ons dat s_1 de uitredende variabele is.

Na rij operaties krijgen we:

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
Z	1	0	0	1	0	0	3
x_1	0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	1
s_2	0	0	$2\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	0	2
s_3	0	0	$-4\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	1	1

De gereduceerde kostencoëfficiënt van de niet-basisvariabele x_2 is 0, dus er zijn meerdere optimale oplossingen. Waarom? Voer een verbetering stap uit met x_2 als intredende variabele. De minimum ratio test verteld dat s_2 de uittredende variabele is. Rij operaties geeft

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
Z	1	0	0	1	0	0	3
x_1	0	1	0	$\frac{3}{7}$	$-\frac{2}{7}$	0	$\frac{3}{7}$
x_2	0	0	1	$-\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$	0	$\frac{6}{7}$
s_3	0	0	0	-1	2	1	5