

Vorige week zagen we hoe de simplexmethode eenvoudige lineair programmeringsmodellen kan oplossen.

### Eigenschappen simplextableau

- We plaatsen vooraan de basisvariabelen.
- Onder de basisvariabelen staan eenheidsvectoren.
- De gereduceerde kostencoëfficiënten van basisvariabelen zijn 0.
- Aan de rechterkant staan niet-negatieve getallen.

# Eenvoudige LP modellen

Bij eenvoudige lineair programmeringsmodellen is het eenvoudig een toegelaten basisoplossing te vinden.

Maak de slackvariabelen de basisvariabelen en geef ze de waarde van de rechterzijde constanten. De niet-basisvariabelen krijgen waarde 0.

Bij moeilijke lineair programmeringsmodellen een probleem.

## Voorbeeld moeilijk LP model

$$\begin{array}{rcll} \text{maximaliseer } Z & = & 3x_1 & +2x_2 & -x_3 & & & \\ \text{o.d.v.} & & 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 8 & \\ & & x_1 & +x_2 & & \leq & 10 & \\ & & -x_1 & -3x_2 & & \leq & -20 & \\ & & x_1 & , x_2 & , x_3 & \geq & 0 & \end{array}$$

Maak alle rechterzijde constanten niet-negatief.

$$\begin{array}{rcll} \text{maximaliseer } Z & = & 3x_1 & +2x_2 & -x_3 & & & \\ \text{o.d.v.} & & 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 8 & \\ & & x_1 & +x_2 & & \leq & 10 & \\ & & x_1 & +3x_2 & & \geq & 20 & \\ & & x_1 & , x_2 & , x_3 & \geq & 0 & \end{array}$$



## Kunstmatige variabelen

$$\begin{array}{rcccccc} 2x_1 & +x_2 & +x_3 & & & = & 8 \\ x_1 & +x_2 & & +s_1 & & = & 10 \\ x_1 & +3x_2 & & & -s_2 & = & 20 \\ x_1 & , x_2 & , x_3 & , s_1 & , s_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Introduceer nieuwe variabelen, voeg ze toe aan elke vergelijking die geen slackvariabele bevat, en voeg niet-negativiteitsrestricties toe voor deze variabelen. Deze variabelen worden **kunstmatige** variabelen genoemd.

$$\begin{array}{rcccccc} 2x_1 & +x_2 & +x_3 & & +a_1 & = & 8 \\ x_1 & +x_2 & & +s_1 & & = & 10 \\ x_1 & +3x_2 & & & -s_2 & +a_2 & = & 20 \\ x_1 & , x_2 & , x_3 & , s_1 & , s_2 & , a_1 & , a_2 & \geq & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccccccc}
2x_1 & +x_2 & +x_3 & & & +a_1 & & = & 8 \\
x_1 & +x_2 & & +s_1 & & & & = & 10 \\
x_1 & +3x_2 & & & -s_2 & & +a_2 & = & 20 \\
x_1 & , x_2 & , x_3 & , s_1 & , s_2 & , a_1 & , a_2 & \geq & 0
\end{array}$$

We kunnen nu een toegelaten basisoplossing aflezen:  $a_1 = 8$ ,  $s_1 = 10$ ,  $a_2 = 20$ ,  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 0$ ,  $s_2 = 0$ .

**Probleem:** Ons lineair programmeringsmodel is anders!  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$  en  $x_3 = 0$  is geen toegelaten oplossing van ons oorspronkelijk lineair programmeringsprobleem. We moet ervoor zorgen dat de kunstmatige variabelen gelijk aan 0 worden.

Er zijn twee methodes om dat te bereiken.

- 2-fase methode
- Big-M methode

## De 2-fase methode – fase 1

Vervang de doelstellingsfunctie door minimalisatie van de som van alle kunstmatige variabelen.

$$\text{minimaliseer } \tilde{W} = \sum a_i,$$

of

$$\text{maximaliseer } W = \sum -a_i.$$

$$\begin{array}{rcllclclcl} \text{maximaliseer } W & = & -a_1 & -a_2 & & & & & & \\ \text{o.d.v.} & & 2x_1 & +x_2 & +x_3 & & & +a_1 & = & 8 \\ & & x_1 & +x_2 & & +s_1 & & & = & 10 \\ & & x_1 & +3x_2 & & & -s_2 & +a_2 & = & 20 \\ & & x_1 & , x_2 & , x_3 & , s_1 & , s_2 & , a_1 & , a_2 & \geq 0 \end{array}$$

## Fase 1: van model naar simplextableau

	$W$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$a_1$	$a_2$	$b$
$W$	1	0	0	0	0	0	1	1	0
$a_1$	0	2	1	1	0	0	1	0	8
$s_1$	0	1	1	0	1	0	0	0	10
$a_2$	0	1	3	0	0	-1	0	1	20

Het simplextableau is **niet** in de juiste vorm. De gereduceerde kostcoëfficiënten van de basisvariabelen  $a_1$  en  $a_2$  zijn **ongelijk aan 0**. Zorg er eerst voor d.m.v. rij-operaties dat de gereduceerde kostcoëfficiënten van de basisvariabelen 0 zijn.

Het juiste simplextableau is

	$W$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$a_1$	$a_2$	$b$
$W$	1	-3	-4	-1	0	1	0	0	-28
$a_1$	0	2	1	1	0	0	1	0	8
$s_1$	0	1	1	0	1	0	0	0	10
$a_2$	0	1	3	0	0	-1	0	1	20

We kiezen  $x_1$  als intredende variabele. Dan wordt  $a_1$  de uittredende variabele. De nieuwe basis is  $x_1, s_1, a_2$ .

	$W$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$a_1$	$a_2$	$b$
$W$	1	0	$-2\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	$1\frac{1}{2}$	0	-16
$x_1$	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	4
$s_1$	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	6
$a_2$	0	0	$2\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	-1	$-\frac{1}{2}$	1	16

	$W$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$a_1$	$a_2$	$b$
$W$	1	0	$-2\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	$1\frac{1}{2}$	0	-16
$x_1$	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	4
$s_1$	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	6
$a_2$	0	0	$2\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	-1	$-\frac{1}{2}$	1	16

We moeten  $x_2$  als intredende variabele kiezen. Dan wordt  $a_2$  de uittredende variabele. De nieuwe basis  $x_1, s_1, x_2$ .

	$W$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$a_1$	$a_2$	$b$
$W$	1	0	0	0	0	0	1	1	0
$x_1$	0	1	0	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$
$s_1$	0	0	0	$-\frac{2}{5}$	1	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$2\frac{4}{5}$
$x_2$	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	0	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$6\frac{2}{5}$

## De tweede fase

Afhankelijk van de optimale waarde  $W^*$  gevonden in de eerste fase doen we:

- $W^* < 0$ . Het originele lineaire programmeringsmodel is niet toegelaten.
- $W^* = 0$ , en geen enkele  $a_i$  is in de basis.
  - ▶ Vergeet de  $a_i$ 's. Schap de kolommen van de  $a_i$ 's.
  - ▶ Vervang in de optimale simplextableau de eerste rij door de originele doelstellingsfunctie.
  - ▶ Het tableau is mogelijk nog niet in de juiste vorm, omdat gereduceerde kostcoëfficiënten van basisvariabelen ongelijk aan 0 kunnen zijn. Breng het tableau eerst in de juiste vorm.
  - ▶ Voer nu de tweede fase uit met behulp van de simplexmethode.

Het volgende kan gebeuren.

- $W^* = 0$  en tenminste één van de  $a_i$ 's is in de basis. (Dit betekent dat  $a_i = 0$  voor die variabele.)
- Zorg er eerst voor dat alle  $a_i$ 's uit de basis zijn.

## Voorbeeld voor de fase 2

Uit de eerste fase kregen we

	$W$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$a_1$	$a_2$	$b$
$W$	1	0	0	0	0	0	1	1	0
$x_1$	0	1	0	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$
$s_1$	0	0	0	$-\frac{2}{5}$	1	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$2\frac{4}{5}$
$x_2$	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	0	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$6\frac{2}{5}$

Haal alle kolommen van de kunstmatige variabele weg en gebruik de originele doelstellingsfunctie. In ons geval:

$$Z = 3x_1 + 2x_2 - x_3$$

Dus

	$Z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$b$
$Z$	1	-3	-2	1	0	0	0
$x_1$	0	1	0	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$
$s_1$	0	0	0	$-\frac{2}{5}$	1	$\frac{1}{5}$	$2\frac{4}{5}$
$x_2$	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	0	$-\frac{2}{5}$	$6\frac{2}{5}$

Dit is nog **niet** in de juiste vorm.

Het juiste simplextableau is:

	Z	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$b$
Z	1	0	0	$2\frac{2}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	$15\frac{1}{5}$
$x_1$	0	1	0	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$
$s_1$	0	0	0	$-\frac{2}{5}$	1	$\frac{1}{5}$	$2\frac{4}{5}$
$x_2$	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	0	$-\frac{2}{5}$	$6\frac{2}{5}$

Merk op dat de basisvariabelen dezelfde basisvariabelen zijn als waarmee we de eerste fase eindigden.

	Z	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$b$
Z	1	0	0	$2\frac{2}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	$15\frac{1}{5}$
$x_1$	0	1	0	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$
$s_1$	0	0	0	$-\frac{2}{5}$	1	$\frac{1}{5}$	$2\frac{4}{5}$
$x_2$	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	0	$-\frac{2}{5}$	$6\frac{2}{5}$

Als we de simplexmethode uitvoeren krijgen we:

	z	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$b$
z	1	1	0	3	0	0	16
$s_2$	0	5	0	3	0	1	4
$s_1$	0	-1	0	-1	1	0	2
$x_2$	0	0	1	1	0	0	8

Alle gereduceerde kostcoëfficiënten zijn niet-negatief, dus we hebben een optimaal simplextableau. Een optimale oplossing voor de standaard vorm is  $s_2 = 4$ ,  $s_1 = 2$ ,  $x_2 = 8$ ,  $x_1 = x_3 = 0$ , met optimale waarde  $Z = 16$ .

Voor het originele lineaire programmeringsmodel

$$\begin{array}{rcll} \text{maximaliseer } Z & = & 3x_1 & +2x_2 & -x_3 \\ \text{o.d.v.} & & 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 8 \\ & & x_1 & +x_2 & & \leq & 10 \\ & & -x_1 & -3x_2 & & \leq & -20 \\ & & x_1 & , x_2 & , x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

is  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 8$  en  $x_3 = 0$  een optimale oplossing. De optimale waarde is  $Z = 16$ .

# Big-M methode

Wat is die  $M$ ???  $M$  staat voor een enorm groot getal.

- We gebruiken nog steeds kunstmatige variabelen.
- Als we maximaliseren, tellen we  $-Ma_i$  op bij de doelstellingsfunctie voor elke kunstmatige variabele  $a_i$ .
- Omdat we maximaliseren, dwingen we dat  $a_i = 0$ .

Als we minimaliseren, moet we  $Ma_i$  optellen bij de doelstellingsfunctie voor elke kunstmatige variabele  $a_i$ .

In ons voorbeeld

$$\begin{array}{rcllclclclcl}
 \text{maximaliseer } Z & = & 3x_1 & +2x_2 & -x_3 & & & & & & \\
 \text{o.d.v.} & & 2x_1 & +x_2 & +x_3 & & & +a_1 & & = & 8 \\
 & & x_1 & +x_2 & & & +s_1 & & & = & 10 \\
 & & x_1 & +3x_2 & & & & -s_2 & & +a_2 & = 20 \\
 & & x_1 & , x_2 & , x_3 & , s_1 & , s_2 & , a_1 & , a_2 & \geq & 0
 \end{array}$$

Voeg aan de doelstellingsfunctie  $-Ma_i$  toe voor elke kunstmatige variabele  $a_i$ .

$$\begin{array}{rcllclclclclcl}
 \text{maximaliseer } Z & = & 3x_1 & +2x_2 & -x_3 & & & -Ma_1 & -Ma_2 & & \\
 \text{o.d.v.} & & 2x_1 & +x_2 & +x_3 & & & +a_1 & & = & 8 \\
 & & x_1 & +x_2 & & & +s_1 & & & = & 10 \\
 & & x_1 & +3x_2 & & & & -s_2 & & +a_2 & = 20 \\
 & & x_1 & , x_2 & , x_3 & , s_1 & , s_2 & , a_1 & , a_2 & \geq & 0
 \end{array}$$

Breng dit in een simplextableau.

	Z	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$a_1$	$a_2$	$b$
Z	1	-3	-2	1	0	0	M	M	0
$a_1$	0	2	1	1	0	0	1	0	8
$s_1$	0	1	1	0	1	0	0	0	10
$a_2$	0	1	3	0	0	-1	0	1	20

Dit is nog geen juiste simplextableau, omdat de gereduceerde kostencoëfficiënten van de basisvariabelen  $a_1$  en  $a_2$  ongelijk aan 0 zijn.

	Z	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$a_1$	$a_2$	$b$
Z	1	$-3 - 3M$	$-2 - 4M$	$1 - M$	0	M	0	0	$-28M$
$a_1$	0	2	1	1	0	0	1	0	8
$s_1$	0	1	1	0	1	0	0	0	10
$a_2$	0	1	3	0	0	-1	0	1	20

Als intredende variabele nemen we  $x_1$ . De uittredende variabele is dan  $a_1$ . De nieuwe basis wordt  $x_1, s_1, a_2$ .

	Z	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$a_1$	$a_2$	$b$
Z	1	0	$-\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2}M$	$2\frac{1}{2} + \frac{1}{2}M$	0	M	$1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}M$	0	$12 - 16M$
$x_1$	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	4
$s_1$	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	6
$a_2$	0	0	$2\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	-1	$-\frac{1}{2}$	1	16

De intredende variabele moet  $x_2$  zijn. De uittredende variabele is  $a_2$ .

	Z	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$a_1$	$a_2$	$b$
Z	1	0	0	$2\frac{2}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	$1\frac{2}{5} + M$	$\frac{1}{5} + M$	$15\frac{1}{5}$
$x_1$	0	1	0	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$
$s_1$	0	0	0	$-\frac{2}{5}$	1	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$2\frac{4}{5}$
$x_2$	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	0	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$6\frac{2}{5}$

De intredende variabele is  $s_2$ . De uittredende variabele is  $x_1$ .

	Z	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$a_1$	$a_2$	b
Z	1	1	0	3	0	0	$2 + M$	$M$	16
$s_2$	0	5	0	3	0	1	3	-1	4
$s_1$	0	-1	0	-1	1	0	-1	0	2
$x_2$	0	2	1	1	0	0	1	0	8

We hebben een optimaal simplextableau. We lezen af dat  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 8$ ,  $x_3 = 0$ ,  $s_1 = 2$  en  $s_2 = 4$  een optimale basisoplossing is van

$$\begin{array}{rcl}
 \text{maximaliseer } Z & = & 3x_1 + 2x_2 - x_3 \\
 \text{o.d.v.} & & 2x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\
 & & x_1 + x_2 + s_1 = 10 \\
 & & x_1 + 3x_2 - s_2 = 20 \\
 & & x_1, x_2, x_3, s_1, s_2 \geq 0
 \end{array}$$

De optimale waarde is 16.

Dus  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 8$  en  $x_3 = 0$  is een optimale oplossing van

$$\begin{array}{rcll} \text{maximaliseer } Z & = & 3x_1 & +2x_2 & -x_3 \\ \text{o.d.v.} & & 2x_1 & +x_2 & +x_3 = 8 \\ & & x_1 & +x_2 & \leq 10 \\ & & -x_1 & -3x_2 & \leq -20 \\ & & x_1 & , x_2 & , x_3 \geq 0 \end{array}$$