

Dualiteit

$$\begin{array}{rcll} \text{maximaliseer } Z & = & 120x_1 & +80x_2 \\ \text{o.d.v.} & & x_1 & \leq 40 \\ & & & x_2 \leq 10 \\ & & 20x_1 & +10x_2 \leq 500 \\ & & x_1, & x_2 \geq 0 \end{array}$$

Voor elke toegelaten oplossing x_1, x_2 van dit lineaire programmeringsmodel is $120x_1 + 80x_2$ kleiner of gelijk aan de optimale waarde.

- Bijvoorbeeld $x_1 = 25$ en $x_2 = 0$ is een toegelaten oplossing en geeft de waarde $Z = 3000$. De optimale waarde van het lineaire programmeringsmodel is tenminste 3000.
- Als we $x_1 = 20$ en $x_2 = 10$ nemen, dan is de waarde van $Z = 3200$. De optimale waarde van het lineaire programmeringsmodel is tenminste 3200.

Bovengrenzen

We kunnen ook een bovengrens geven voor de optimale waarde van dit lineair programmeringsmodel.

Eerst brengen we het lineaire programmeringsmodel in standaard vorm.

$$\begin{array}{rcll} \text{maximaliseer } Z & = & 120x_1 & +80x_2 \\ \text{o.d.v.} & & x_1 & +s_1 & = & 40 \\ & & & x_2 & +s_2 & = & 10 \\ & & 20x_1 & +10x_2 & & +s_3 & = & 500 \\ & & x_1, & x_2, & s_1, & s_2, & s_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Een bovengrens is bijvoorbeeld 5600, omdat

$$\begin{aligned} 120x_1 + 80x_2 &\leq 120x_1 + 80x_2 + 120s_1 + 80s_2 \\ &= 120(x_1 + s_1) + 80(x_2 + s_2) \\ &= 120 \cdot 40 + 80 \cdot 10 \\ &= 5600 \end{aligned}$$

Dus is de optimale waarde ten hoogste 5600.

Een betere bovengrens

$$\begin{array}{rcll} \text{maximaliseer } Z & = & 120x_1 & +80x_2 \\ \text{o.d.v.} & & x_1 & +s_1 & = & 40 \\ & & & x_2 & +s_2 & = & 10 \\ & & 20x_1 & +10x_2 & +s_3 & = & 500 \\ & & x_1, & x_2, & s_1, & s_2, & s_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Een betere bovengrens voor de optimale waarde van dit lineaire programmeringsmodel is 3200:

$$\begin{aligned} 120x_1 + 80x_2 &\leq 120x_1 + 80x_2 + 20s_2 + 6s_3 \\ &= 20(x_2 + s_2) + 6(20x_1 + 10x_2 + s_3) \\ &= 20 \cdot 10 + 6 \cdot 500 \\ &= 3200. \end{aligned}$$

Als we de optimale waarde van het lineaire programmeringsmodel noteren met Z^* , dan hebben we dus $3200 \leq Z^* \leq 3200$. De optimale waarde van dit lineair programmeringsmodel moet dus gelijk zijn aan 3200.

Hoe vinden we bovengrenzen?

Stel we nemen y_1, y_2, y_3 zodat

$$\begin{array}{rcl} y_1 & +20y_3 & \geq 120 \\ & y_2 +10y_3 & \geq 80 \\ y_1, y_2, y_3 & & \geq 0 \end{array}$$

dan

$$\begin{aligned} 120x_1 + 80x_2 &\leq (y_1 + 20y_3)x_1 + (y_2 + 10y_3)x_2 \\ &\leq y_1x_1 + y_2x_2 + y_3(20x_1 + 10x_2) \\ &\leq y_1x_1 + y_1s_1 + y_2x_2 + y_2s_2 + y_3(20x_1 + 10x_2) + y_3s_3 \\ &\leq y_1(x_1 + s_1) + y_2(x_2 + s_2) + y_3(20x_1 + 10x_2 + s_3) \\ &= 40y_1 + 10y_2 + 500y_3. \end{aligned}$$

Dus voor elke toegelaten oplossing x_1, x_2 en elke toegelaten oplossing y_1, y_2, y_3 geldt:

$$120x_1 + 80x_2 \leq 40y_1 + 10y_2 + 500y_3.$$

Laagst mogelijk bovengrens

We nemen $40y_1 + 10y_2 + 500y_3$ zo laag mogelijk, terwijl nog steeds voldaan wordt aan de restricties.

$$\begin{array}{rcll} \text{minimaliseer } W & = & 40y_1 & +10y_2 & +500y_3 \\ \text{o.d.v.} & & y_1 & & +20y_3 & \geq & 120 \\ & & & y_2 & +10y_3 & \geq & 80 \\ & & y_1, & y_2, & y_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Als we de optimale waarde van dit lineair programmeringsprobleem noteren met W^* , dan hebben we

$$Z^* \leq W^*$$

Het dual lineaire programmeringsmodel

Het lineaire programmeringsmodel

$$\begin{array}{ll} \text{maximaliseer} & Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.t.} & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m \\ & x_j \geq 0 \end{array}$$

heeft een **dual** lineaire programmeringsmodel

$$\begin{array}{ll} \text{minimaliseer} & W = \sum_{i=1}^m b_i y_i \\ \text{s.t.} & \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j, \quad j = 1, \dots, n \\ & y_i \geq 0 \end{array}$$

We noemen het originele lineair programmeringsmodel het **primale** lineair programmeringsmodel.

Primale	Duale
kostencoëfficiënten	rechterzijde constanten
rechterzijde constanten	kostencoëfficiënten
<i>i</i> de functionele restrictie	variabele y_i
variabele x_j	<i>j</i> de functionele restrictie

Het duale van

$$\begin{array}{rcll} \text{maximaliseer } Z & = & 3x_1 & +5x_2 \\ \text{o.d.v.} & & x_1 & \leq 4 \\ & & & 2x_2 \leq 12 \\ & & 3x_1 & +2x_2 \leq 18 \\ & & x_1, & x_2 \geq 0 \end{array}$$

is

$$\begin{array}{rcll} \text{minimaliseer } W & = & 4y_1 & +12y_2 +18y_3 \\ \text{o.d.v.} & & y_1 & +3y_3 \geq 3 \\ & & & 2y_2 +2y_3 \geq 5 \\ & & y_1, & y_2, y_3 \geq 0 \end{array}$$

Zwakke dualiteitsstelling eenvoudige LP modellen

- Laat $c_1x_1 + \dots + c_nx_n$ de doelstellingsfunctie van het primale lineaire programmeringsmodel zijn.
- Laat $b_1y_1 + \dots + b_my_m$ de doelstellingsfunctie van het duale lineaire programmeringsmodel zijn.

Zwakke dualiteitsstelling

Voor elke toegelaten oplossing x_1, \dots, x_n van het primale lineaire programmeringsmodel en elke toegelaten oplossing y_1, \dots, y_m van het duale lineaire programmeringsmodel geldt:

$$c_1x_1 + \dots + c_nx_n \leq b_1y_1 + \dots + b_my_m$$

- Als het primale onbegrensd is, dan is het dual niet toegelaten (heeft geen toegelaten oplossingen).
- Als het duale onbegrensd is, dan is het primale niet toegelaten.

Voorbeeld

$$\begin{array}{rcll} \text{maximaliseer } Z & = & x_1 & +x_2 \\ \text{o.d.v.} & & -x_1 & +2x_2 \leq 1 \\ & & & x_2 \leq 1 \\ & & x_1, & x_2 \geq 0 \end{array}$$

Dit lineaire programmeringsmodel is onbegrensd. Het duale lineaire programmeringsmodel is:

$$\begin{array}{rcll} \text{minimaliseer } W & = & y_1 & +y_2 \\ & & -y_1 & \geq 1 \\ & & 2y_1 & +y_2 \geq 1 \\ & & y_1, & y_2 \geq 0 \end{array}$$

Dit lineaire programmeringsmodel moet niet-toegelaten zijn.

Duale van moeilijke LP modellen

Wat is het duale lineaire programmeringsmodel van het volgende model?

$$\begin{aligned} \text{maximaliseer } Z &= 5x_1 + 6x_2 \\ x_1 + x_2 &\leq 3 \\ 2x_1 - 4x_2 &\leq 5 \\ x_1, x_2 &\leq 0 \quad \leftarrow \text{let op!} \end{aligned}$$

Substitutie van $x'_1 = -x_1$ and $x'_2 = -x_2$ geeft

$$\begin{aligned} \text{maximaliseer } Z &= -5x'_1 - 6x'_2 \\ -x'_1 - x'_2 &\leq 3 \\ -2x'_1 + 4x'_2 &\leq 5 \\ x'_1, x'_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

We weten wat het duale is van dit model.

$$\begin{array}{rcl}
 \text{minimaliseer } W & = & 3y_1 + 5y_2 \\
 & & -y_1 - 2y_2 \geq -5 \\
 & & -y_1 + 4y_2 \geq -6 \\
 & & y_1, y_2 \geq 0
 \end{array}$$

Dit kunnen we herschrijven als

$$\begin{array}{rcl}
 \text{minimaliseer } W & = & 3y_1 + 5y_2 \\
 & & y_1 + 2y_2 \leq 5 \\
 & & y_1 - 4y_2 \leq 6 \\
 & & y_1, y_2 \geq 0
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \text{maximaliseer } Z &= 5x_1 + 6x_2 \\
 x_1 + x_2 &\leq 3 \\
 2x_1 - 4x_2 &\leq 5 \\
 x_1, x_2 &\leq 0
 \end{aligned}$$

heeft als het duale lineaire programmeringsmodel

$$\begin{aligned}
 \text{minimaliseer } W &= 3y_1 + 5y_2 \\
 y_1 + 2y_2 &\leq 5 \\
 y_1 - 4y_2 &\leq 6 \\
 y_1, y_2 &\geq 0
 \end{aligned}$$

Als de doelstelling maximaliseren is, dan geeft een variabele $x_i \leq 0$ in het duale lineair programmeringsmodel een \leq -functionele restrictie.

Wat is het duale lineaire programmeringsmodel van het volgende model?

$$\begin{aligned} \text{maximaliseer } Z &= 5x_1 + 6x_2 \\ x_1 + x_2 &\leq 3 \\ 2x_1 - 4x_2 &\leq 5 \end{aligned}$$

← let op: vrije variabelen!

Substitutie van $x_1 = x_1' - x_1''$ and $x_2 = x_2' - x_2''$ geeft

$$\begin{aligned} \text{maximaliseer } Z &= 5x_1' - 5x_1'' + 6x_2' - 6x_2'' \\ x_1' - x_1'' + x_2' - x_2'' &\leq 3 \\ 2x_1' - 2x_1'' - 4x_2' + 4x_2'' &\leq 5 \\ x_1', x_1'', x_2', x_2'' &\geq 0 \end{aligned}$$

We weten wat het duale is van dit model.

$$\begin{array}{rcl}
 \text{minimaliseer } W & = & 3y_1 + 5y_2 \\
 & & y_1 + 2y_2 \geq 5 \\
 & & -y_1 - 2y_2 \geq -5 \\
 & & y_1 - 4y_2 \geq 6 \\
 & & -y_1 + 4y_2 \geq -6 \\
 & & y_1, y_2 \geq 0
 \end{array}$$

Dit geeft:

$$\begin{array}{rcl}
 \text{minimaliseer } W & = & 3y_1 + 5y_2 \\
 & & y_1 + 2y_2 = 5 \\
 & & y_1 - 4y_2 = 6 \\
 & & y_1, y_2 \geq 0
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \text{maximaliseer } Z &= 5x_1 + 6x_2 \\
 x_1 + x_2 &\leq 3 \\
 2x_1 - 4x_2 &\leq 5
 \end{aligned}$$

heeft als het duale lineaire programmeringsmodel

$$\begin{aligned}
 \text{minimaliseer } W &= 3y_1 + 5y_2 \\
 y_1 + 2y_2 &= 5 \\
 y_1 - 4y_2 &= 6 \\
 y_1, y_2 &\geq 0
 \end{aligned}$$

Als de doelstelling maximaliseren is, dan geeft een vrije variabele x_i in het duale lineair programmeringsmodel een =-functionele restrictie.

Wat is het duale lineaire programmeringsmodel van het volgende model?

$$\begin{aligned} \text{maximaliseer } Z &= 5x_1 + 6x_2 \\ x_1 + x_2 &\leq 3 \\ 2x_1 - 4x_2 &= 5 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

We kunnen $2x_1 - 4x_2 = 5$ schrijven als

$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 &\leq 5 \\ -2x_2 + 4x_2 &\leq -5. \end{aligned}$$

Dus we krijgen

$$\begin{aligned} \text{maximaliseer } Z &= 5x_1 + 6x_2 \\ x_1 + x_2 &\leq 3 \\ 2x_1 - 4x_2 &\leq 5 \\ -2x_1 + 4x_2 &\leq -5 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

We weten wat het duale van dit model is.

$$\begin{array}{rcll}
 \text{maximaliseer } Z & = & 5x_1 & +6x_2 \\
 \text{o.d.v.} & & x_1 & +x_2 \leq 3 \\
 & & 2x_1 & -4x_2 \leq 5 \\
 & & -2x_1 & +4x_2 \leq -5 \\
 & & x_1, & x_2 \geq 0
 \end{array}$$

Het duale is

$$\begin{array}{rcll}
 \text{minimaliseer } W & = & 3y_1 & +5y_2' & -5y_2'' \\
 \text{o.d.v.} & & y_1 & +2y_2' & -2y_2'' \geq 5 \\
 & & y_1 & -4y_2' & +4y_2'' \geq 6 \\
 & & y_1, & y_2', & y_2'' \geq 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll}
 \text{minimaliseer } W & = & 3y_1 & +5y_2' & -5y_2'' \\
 \text{o.d.v.} & & y_1 & +2y_2' & -2y_2'' & \geq & 5 \\
 & & y_1 & -4y_2' & +4y_2'' & \geq & 6 \\
 & & y_1, & y_2', & y_2'' & \geq & 0
 \end{array}$$

Dit kunnen we ook schrijven als

$$\begin{array}{rcll}
 \text{minimaliseer } W & = & 3y_1 & +5y_2 \\
 \text{o.d.v.} & & y_1 & +2y_2 & \geq & 5 \\
 & & y_1 & -4y_2 & \geq & 6 \\
 & & y_1 & & \geq & 0
 \end{array}$$

Als de doelstelling maximaliseren is, dan geeft een $=$ -functionele restrictie in het duale een vrije variabele.

Wat is het duale van het volgende lineaire programmeringsmodel?

$$\begin{array}{ll} \text{minimaliseer} & 5x_1 + 6x_2 \\ & x_1 + x_2 \leq 3 \\ & 2x_1 - 4x_2 \leq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

We kunnen dit herschrijven als

$$\begin{array}{ll} \text{maximaliseer} & -5x_1 - 6x_2 \\ & x_1 + x_2 \leq 3 \\ & 2x_1 - 4x_2 \leq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

We weten wat het duale is van dit LP model.

maximaliseer

$$\begin{array}{rcl}
 -5x_1 & -6x_2 & \\
 x_1 & +x_2 & \leq 3 \\
 2x_1 & -4x_2 & \leq 5 \\
 x_1, & x_2 & \geq 0
 \end{array}$$

Het duale is

minimaliseer

$$\begin{array}{rcl}
 3y'_1 & +5y'_2 & \\
 y'_1 & +2y'_2 & \geq -5 \\
 y'_1 & -4y'_2 & \geq -6 \\
 y'_1, & y'_2 & \geq 0
 \end{array}$$

minimaliseer

$$\begin{array}{rcl}
 3y_1' & +5y_2' & \\
 y_1' & +2y_2' & \geq -5 \\
 y_1' & -4y_2' & \geq -6 \\
 y_1', & y_2' & \geq 0
 \end{array}$$

Dit kunnen we herschrijven als

minimaliseer

$$\begin{array}{rcl}
 3y_1' & +5y_2' & \\
 -y_1' & -2y_2' & \leq 5 \\
 -y_1' & +4y_2' & \leq 6 \\
 y_1', & y_2' & \geq 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll}
 \text{minimaliseer} & 3y_1' & +5y_2' & \\
 & -y_1' & -2y_2' & \leq 5 \\
 & -y_1' & +4y_2' & \leq 6 \\
 & y_1' & y_2' & \geq 0
 \end{array}$$

Substitutie $y_1 = -y_1'$ en $y_2 = -y_2'$ geeft

$$\begin{array}{rcll}
 \text{minimaliseer} & -3y_1 & -5y_2 & \\
 & y_1 & +2y_2 & \leq 5 \\
 & y_1 & -4y_2 & \leq 6 \\
 & y_1, & y_2 & \leq 0
 \end{array}$$

We kunnen minimaliseer $-3y_1 - 5y_2$ herschrijven als maximaliseer $3y_1 + 5y_2$.

Als de doelstelling minimaliseren is, dan geven \leq -functionele restricties in het duale $y_i \leq 0$ (niet-positiviteitsrestricties), en niet-negativiteits restricties geven in het dual \leq -functionele restricties.

Hoe vinden we het duale lineaire programmeringsmodel van een willekeurige lineaire programmeringsmodel? Welke regels zijn er?

	Primale	Duale
	maximaliseer Z	minimaliseer W
i de functionele restrictie	\leq $=$ \geq	variabele y_i ≥ 0 vrij ≤ 0
variabele x_j	≥ 0 vrij ≤ 0	j de functionele restrictie \geq $=$ \leq

	Dual	Primal
	maximaliseer Z	minimaliseer W
i de functionele restrictie	\leq $=$ \geq	variabele x_i ≥ 0 vrij ≤ 0
variabele y_j	≥ 0 vrij ≤ 0	j de functionele restrictie \geq $=$ \leq

Wat gebeurt er als we het duale van het duale nemen?

Het duale lineaire programmeringsmodel van het duale lineaire programmeringsmodel is het primale lineaire programmeringsmodel.

Sterke dualiteitsstelling

Als zowel het primale als het duale lineaire programmeringsmodel toegelaten oplossingen hebben, dan hebben ze optimale oplossingen.

Noteer de optimale waarde van het primale met Z^* en de optimale waarde van het duale met W^* .

Sterke dualiteitsstelling

$$Z^* = W^*$$

Een optimale oplossing voor het duale lineaire programmeringsmodel kan afgelezen worden van het simplextableau van het primale.

$$\begin{array}{rcll} \text{maximaliseer } Z & = & 120x_1 & +80x_2 \\ \text{o.d.v.} & & x_1 & \leq 40 \\ & & & x_2 \leq 10 \\ & & 20x_1 & +10x_2 \leq 500 \\ & & x_1, & x_2 \geq 0 \end{array}$$

Het duale lineaire programmeringsprobleem is:

$$\begin{array}{rcll} \text{minimaliseer } W & = & 40y_1 & +10y_2 & +500y_3 \\ \text{o.d.v.} & & y_1 & & +20y_3 \geq 120 \\ & & & y_2 & +10y_3 \geq 80 \\ & & y_1, & y_2, & y_3 \geq 0 \end{array}$$

Het eerste simplextableau is

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
Z	1	-120	-80	0	0	0	0
s_1	0	1	0	1	0	0	40
s_2	0	0	1	0	1	0	10
s_3	0	20	10	0	0	1	500

Het optimal simplextableau is

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
Z	1	0	0	0	20	6	3200
s_1	0	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{20}$	20
x_2	0	0	1	0	1	0	10
x_1	0	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{20}$	20

We kunnen een optimale oplossing voor het duale lineaire programmeringsmodel aflezen als de gereduceerde kostencoëfficiënten onder de slackvariabelen. Dus $y_1 = 0$, $y_2 = 20$, $y_3 = 6$ is een optimale oplossing van het duale. Waarom?