College 5: Gevoeligheidsanalyse

Wat behandeld wordt in dit college

- Wat gebeurt er met een optimale oplossing/optimale waarde als ik een parameter in het lineair programmeringsmodel verander? Meer specifiek, wat gebeurt er als ik
  - kostencoëfficiënten verander?
  - rechterzijde constanten verander?
  - linkerzijde constanten verander?
  - een beslissingsvariabele toevoeg?
  - een restrictie toevoeg?

Verandering van kostencoëfficiënten

We zitten in de R&D afdeling van een bedrijf. We hebben een lineair programmeringsmodel opgesteld en met behulp van de simplexmethode hebben we een optimale oplossing gevonden. Ons lineaire programmeringsmodel is

$$\begin{array}{lcllll} \text{maximaliseer } Z & = & 2x_1 & -3x_2 & +4x_3 & \\ \text{o.d.v.} & & x_1 & -x_2 & +2x_3 & \leq & 7 \\ & & 2x_1 & +x_2 & +3x_3 & \leq & 22 \\ & & x_1 & -x_2 & +x_3 & \leq & 2 \\ & & x_1, & x_2, & x_3 & \geq & 0 \end{array} .$$

Dit lossen we met behulp van de simplexmethode op. Het simplex tableau waarmee we starten is

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b
Z	1	-2	3	-4	0	0	0	0
s_1	0	1	-1	2	1	0	0	7
s_2	0	2	1	3	0	1	0	22
s_3	0	1	-1	1	0	0	1	2

We zien dat er negatieve gereduceerde kostencoëfficiënten zijn (die van x_1 en x_3). We laten x_3 intredende variabele zijn en met behulp van de minimum ratio test zien we dat s_3 uittredende variabele is. (s_1 heeft ratio 7/2, s_2 heeft ratio 22/3 en s_3 heeft ratio 2/1. Minimum is bij s_3.) Ons volgende simplextableau wordt

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b
Z	1	2	-1	0	0	0	4	8
s_1	0	-1	1	0	1	0	-2	3
s_2	0	-1	4	0	0	1	-3	16
x_3	0	1	-1	1	0	0	1	2

We zien dat er negatieve gereduceerde kostencoëfficiënten zijn. We laten x_2 intredende variabele zijn en met behulp van de minimum ratio test zien we dat s_1 uittredende variabele is. (s_1 heeft ratio 3/2, s_2 heeft ratio 16/4 en x_3 moeten we overslaan. Minimum is bij s_1.) Ons volgende simplextableau wordt

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b
Z	1	1	0	0	1	0	2	11
x_2	0	-1	1	0	1	0	-2	3
s_2	0	3	0	0	-4	1	5	4
x_3	0	0	0	1	1	0	-1	5

We zien dat er geen negatieve gereduceerde kostencoëfficiënten zijn. We kunnen een optimale basisoplossing aflezen: $x_2 = 3$, $s_2 = 4$, $x_3 = 5$, $x_1 = 0$, $s_1 = 0$ en $s_3 = 0$. De optimale waarde is $Z = 11$.

De directie van het bedrijf wil nu bepaalde producten die we produceren duurder maken. Wat wordt een nieuwe optimale oplossing?

Verandering van kostencoëfficiënten van niet-basisvariabelen

De directie van het bedrijf wil het product 1 duurder maken, i.p.v. een prijs van 2 euros, wil de directie het nu verkopen voor een prijs van $2 + \Delta$ euros. Ons lineaire programmeringsmodel wordt

$$\begin{array}{lcllll}
\text{maximaliseer } Z & = & (2+\Delta)x_1 & -3x_2 & +4x_3 & \\
\text{o.d.v.} & & x_1 & -x_2 & +2x_3 & \leq 7 \\
 & & 2x_1 & +x_2 & +3x_3 & \leq 22 \\
 & & x_1 & -x_2 & +x_3 & \leq 2 \\
 & & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0
\end{array} .$$

Wat wordt een nieuwe optimale basisoplossing? Omdat in de door ons gevonden optimale basisoplossing $x_1 = 0$, zullen we zolang Δ dicht genoeg bij 0 is dezelfde basisoplossing krijgen. Laten we dit eerst met behulp van de simplexmethode uitrekenen en daarna op een slimmere manier uitrekenen. Het simplex tableau waarmee we starten is

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b
Z	1	$-2-\Delta$	3	-4	0	0	0	0
s_1	0	1	-1	2	1	0	0	7
s_2	0	2	1	3	0	1	0	22
s_3	0	1	-1	1	0	0	1	2

We zien dat er negatieve gereduceerde kostencoëfficiënten zijn (die van x_1 en x_3). We laten x_3 intredende variabele zijn en met behulp van de minimum ratio test zien we dat s_3 uittredende variabele is. (s_1 heeft ratio 7/2, s_2 heeft ratio 22/3 en s_3 heeft ratio 2/1. Minimum is bij s_3.) Ons volgende simplextableau wordt

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b
Z	1	$2-\Delta$	-1	0	0	0	4	8
s_1	0	-1	1	0	1	0	-2	3
s_2	0	-1	4	0	0	1	-3	16
x_3	0	1	-1	1	0	0	1	2

We zien dat er negatieve gereduceerde kostencoëfficiënten zijn. We laten x_2 intredende variabele zijn en met behulp van de minimum ratio test zien we dat s_1 uittredende variabele is. (s_1 heeft ratio 3/2, s_2 heeft ratio 16/4 en x_3 moeten we overslaan. Minimum is bij s_1.) Ons volgende simplextableau wordt

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b
Z	1	$1-\Delta$	0	0	1	0	2	11
x_2	0	-1	1	0	1	0	-2	3
s_2	0	3	0	0	-4	1	5	4
x_3	0	0	0	1	1	0	-1	5

We zien dat zolang $1-\Delta \geq 0$, is $x_2 = 3$, $s_2 = 4$, $x_3 = 5$, $x_1 = 0$, $s_1 = 0$ en $s_3 = 0$ een optimale basisoplossing, met optimale waarde $Z = 11$.

Laten we het nu op een slimmere manier doen. Laten we teruggaan naar het optimale simplextableau van het oorspronkelijk probleem (waarbij dus $\Delta = 0$). De matrix onder Z en de slackvariabelen is

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Als we deze matrix vermenigvuldigen met de matrix van het simplextableau waarmee we starten, krijgen we

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 22 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 11 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -4 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

We zien dat we inderdaad de matrix van het optimale simplextableau krijgen.

Laten we nu het probleem bekijken waarbij de kostencoëfficiënt van x_1 veranderd is in $2+\Delta$. Omdat in de matrix van het simplextableau waarmee we starten alleen de kolom van x_1 verandert, voeren we alleen deze vermenigvuldiging uit, alle andere kolommen zullen hetzelfde blijven:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2-\Delta \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\Delta \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

We kunnen dus meteen een simplextableau construeren voor het nieuwe probleem, door de kolom van x_1 te vervangen door deze kolom. Inspectie laat ook zien dat de gereduceerde kostencoëfficiënt van x_1 het enige is dat veranderd is t.o.v. het optimale simplextableau van het oorspronkelijke probleem: er wordt Δ vanaf getrokken.

Wat gebeurt er als $\Delta > 1$, bijvoorbeeld als $\Delta = 2$. We kunnen nog steeds ons nieuwe simplextableau gebruiken, maar omdat de gereduceerde kostencoëfficiënt van x_1 negatief is, zijn we niet klaar en zullen we de simplexmethode moeten toepassen. Het simplextableau dat we krijgen is:

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b
Z	1	-1	0	0	1	0	2	11
x_2	0	-1	1	0	1	0	-2	3
s_2	0	3	0	0	-4	1	5	4
x_3	0	0	0	1	1	0	-1	5

x_1 wordt intredende variabele. De minimum ratio test vertelt ons dat s_2 uittredende variabele wordt. (x_2 moeten we overslaan, s_2 heeft ratio 4/3 en s_3 moeten we overslaan. De minimum ratio is bij s_2.) Ons volgende simplex wordt:

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b
Z	1	0	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$3\frac{2}{3}$	$12\frac{1}{3}$
x_2	0	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$4\frac{1}{3}$
x_1	0	1	0	0	$-\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{4}{3}$
x_3	0	0	0	1	1	0	-1	5

Er zijn negatieve gereduceerde kostencoëfficiënten. s_1 wordt intredende variabele. De minimum ratio test vertelt ons dat x_3 uittredende variabele wordt. Het nieuwe simplextableau wordt:

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b
Z	1	0	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$3\frac{1}{3}$	14
x_2	0	0	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	6
x_1	0	1	0	$\frac{4}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	8
s_3	0	0	0	1	1	0	-1	5

Er zijn geen negatieve gereduceerde kostencoëfficiënten. Een optimale basisoplossing is $x_1 = 8$, $x_2 = 6$, $s_3 = 5$, $x_3 = 0$, $s_1 = 0$ en $s_2 = 0$. De optimale waarde is $Z = 14$.

Verandering van kostencoëfficiënten van basisvariabelen

De directie van het bedrijf heeft haar gedachte verandert, i.p.v. het duurder maken van product 1, wil het nu product 3 duurder maken. Ze wil nu product 3 verkopen voor een prijs van $4 + \Delta$ euros i.p.v. 4 euros. Ons lineaire programmeringsmodel wordt

$$\begin{array}{lrlll} \text{maximaliseer } Z & = & 2x_1 & -3x_2 & +(4+\Delta)x_3 & & \\ \text{o.d.v.} & & x_1 & -x_2 & +2x_3 & \leq & 7 \\ & & 2x_1 & +x_2 & +3x_3 & \leq & 22 \\ & & x_1 & -x_2 & +x_3 & \leq & 2 \\ & & x_1, & x_2, & x_3 & \geq & 0 \end{array} .$$

Wat wordt een nieuwe optimale basisoplossing?

Het simplextableau waarmee we starten is

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b
Z	1	-2	3	$-4-\Delta$	0	0	0	0
s_1	0	1	-1	2	1	0	0	7
s_2	0	2	1	3	0	1	0	22
s_3	0	1	-1	1	0	0	1	2

.

Omdat alleen de gereduceerde kostencoëfficiënt van x_3 verlaagd is met Δ, kunnen we meteen een tableau opschrijven door in de optimale simplextableau de gereduceerde kostencoëfficiënt van x_3 te verlagen met Δ.

Het tableau (wat geen correct simplextableau is omdat de gereduceerde kostencoëfficiënt van de basisvariabele x_3 ongelijk is aan 0) is

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b
Z	1	1	0	$-\Delta$	1	0	2	11
x_2	0	-1	1	0	1	0	-2	3
s_2	0	3	0	0	-4	1	5	4
x_3	0	0	0	1	1	0	-1	5

Door Δ keer de rij x_3 op te tellen bij de rij Z krijgen we

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b
Z	1	1	0	0	$1+\Delta$	0	$2-\Delta$	$11+5\Delta$
x_2	0	-1	1	0	1	0	-2	3
s_2	0	3	0	0	-4	1	5	4
x_3	0	0	0	1	1	0	-1	5

Dit is een correct simplextableau.

We zien dat, zolang de gereduceerde kostencoëfficiënten van s_1 en s_3 niet-negatief zijn, we nog steeds $x_2 = 3$, $s_2 = 4$, $x_3 = 5$, $x_1 = 0$, $s_1 = 0$ en $s_3 = 0$ als optimale basisoplossing hebben. De optimale waarde is $Z = 11+5\Delta$. De gereduceerde kostencoëfficiënten van s_1 en s_2 zijn niet-negatief als $1 + \Delta \geq 0$ en $2 - \Delta \geq 0$, dus als $-1 \leq \Delta \leq 2$.

Als de $\Delta < -1$ en $\Delta > 2$, dan zullen we een aantal stappen van de simplexmethode moeten uitvoeren om een optimale basisoplossing te krijgen.

Verandering van de rechterzijde constanten

De directie wil de hoeveelheid van de tweede resource groter maken en i.p.v. 22 units van resource 2 heeft het bedrijf nu 23 units van resource 2 ter beschikking, zo de tweede restrictie wordt

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 23.$$

Kan jij de directie overtuigen dat het niet meer winst zal geven?

In het oorspronkelijke lineaire programmeringsmodel is de slack van de tweede ongelijkheid

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 22$$

gelijk aan $s_2 = 4$. Het heeft dus geen zin om de hoeveelheid van resource 2 groter te maken. Sterker, we kunnen de directie vertellen dat we de hoeveelheid van resource 2 met 4 kunnen verlagen, dus omlaag kunnen brengen naar 18 zonder dat er minder winst gemaakt zal worden.

Dit hadden we ook kunnen afleiden met behulp van een optimale oplossing van het duale lineaire programmeringsmodel. Herinner dat het volgende lineaire programmeringsmodel het duale van het oorspronkelijke lineaire programmeringsmodel (waarbij de tweede restrictie nog steeds $2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 22$ is)

$$\begin{array}{llllll} \text{minimaliseer } W = & 7y_1 & +22y_2 & +2y_3 & & \\ \text{o.d.v.} & y_1 & +2y_2 & +y_3 & \geq & 2 \\ & -y_1 & +y_2 & -y_3 & \geq & -3 \\ & 2y_1 & +3y_2 & +y_3 & \geq & 4 \\ & y_1, & y_2, & y_3 \geq & 0 & \end{array}$$

Een optimale oplossing kunnen we aflezen uit het optimale simplextableau van het primale. Deze is $y_1 = 1$, $y_2 = 0$ en $y_3 = 2$. De optimale waarde is $W = 11$. (Herinner dat de waarden van y_1, y_2 en y_3 de schaduwprijzen genoemd worden, omdat deze ons vertellen wat er met de optimale waarde van het primale lineaire programmeringsmodel gebeurt als we de hoeveelheden van de resources veranderen. Merk op dat de schaduwprijzen alleen iets zeggen over kleine veranderingen in de hoeveelheid van elke resource.) Omdat $y_2 = 0$, zal de optimale waarde niet veranderen als we de hoeveelheid van resource 2 veranderen van 22 in 23. Omdat $y_1 = 1$, zal de optimale waarde veranderen als we de hoeveelheid van resource 1 veranderen. Laten we dat in een voorbeeld bekijken.

De directie wil de hoeveelheid van de eerste resource groter maken en i.p.v. 7 units van resource 1 heeft het bedrijf nu 8 units van resource ter beschikking. Dus de eerste restrictie wordt

$$x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 8.$$

Wat wordt een nieuwe optimale basisoplossing? We gaan dit op de slimme manier doen. Herinner dat de matrix onder Z en de slackvariabelen gelijk is aan

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Het simplextableau waarmee we starten is

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b
Z	1	-2	3	-4	0	0	0	0
s_1	0	1	-1	2	1	0	0	8
s_2	0	2	1	3	0	1	0	22
s_3	0	1	-1	1	0	0	1	2

Omdat alleen de kolom van b veranderd is, vermenigvuldigen we alleen deze kolom met de matrix. We krijgen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 22 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Dus we krijgen het volgende simplextableau

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b
Z	1	1	0	0	1	0	2	12
x_2	0	-1	1	0	1	0	-2	4
s_2	0	3	0	0	-4	1	5	0
x_3	0	0	0	1	1	0	-1	6

Omdat aan de rechterzijde niet-negatieve getallen staan (namelijk 4, 0 en 6), kunnen we meteen een optimale basisoplossing aflezen voor het nieuwe probleem: $x_2 = 4$, $s_2 = 0$, $x_3 = 6$, $x_1 = 0$, $s_1 = 0$ en $s_3 = 0$. De optimale waarde is $Z = 12$.

Nu wil de directie in het oorspronkelijke probleem de hoeveelheid van de derde resource veranderen en i.p.v. 2 units van resource 3 heeft het bedrijf nu $2 + \Delta$ units van de resource ter beschikking. Dus de derde restrictie wordt

$$x_1 - x_2 + x_3 \leq 2 + \Delta.$$

Wat wordt de nieuwe optimale basisoplossing? We gaan dit weer op de slimme manier doen. Omdat alleen de rechterzijde constanten veranderd zijn, berekenen we alleen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 22 \\ 2+\Delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11+2\Delta \\ 3-2\Delta \\ 4+5\Delta \\ 5-\Delta \end{pmatrix}.$$

We krijgen dus het volgende simplextableau

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b
Z	1	1	0	0	1	0	2	$11 + 2\Delta$
x_2	0	-1	1	0	1	0	-2	$3 - 2\Delta$
s_2	0	3	0	0	-4	1	5	$4 + 5\Delta$
x_3	0	0	0	1	1	0	-1	$5 - \Delta$

Zolang $3 - 2\Delta \geq 0$, $4 + 5\Delta \geq 0$ en $5 - \Delta \geq 0$, dus zolang $-\frac{4}{5} \leq \Delta \leq 1\frac{1}{2}$, kunnen we meteen een optimale basisoplossing aflezen. Deze is $x_2 = 3 - 2\Delta$, $s_2 = 4 + 5\Delta$, $x_3 = 5 - \Delta$, $x_1 = 0$, $s_1 = 0$ en $s_3 = 0$. De optimale waarde is $Z = 11 + 2\Delta$.

Dat de optimale waarde verhoogd wordt met 2Δ is geen toeval. Herinner dat $y_1 = 1$, $y_2 = 0$ en $y_3 = 2$ een optimale oplossing is van het duale van het oorspronkelijke lineaire programmeringsmodel is. De schaduwprijs van de tweede resource is 2. Als we de hoeveelheid van resource 2 verhogen met Δ, zal de optimale waarde verhogen met 2Δ.

Toevoegen van een beslissingsvariabele

Je hebt een prachtig lineair programmeringsmodel opgesteld en met behulp van de simplexmethode opgelost. Helaas heb je één product over het hoofd gezien: het lineaire programmeringsmodel is incorrect en je moet een variabele toevoegen. Het oorspronkelijke lineaire programmeringsmodel was

$$\begin{array}{lcllll} \text{maximaliseer } Z & = & 2x_1 & -3x_2 & +4x_3 & & \\ \text{o.d.v.} & & x_1 & -x_2 & +2x_3 & \leq & 7 \\ & & 2x_1 & +x_2 & +3x_3 & \leq & 22 \\ & & x_1 & -x_2 & +x_3 & \leq & 2 \\ & & x_1, & x_2, & x_3 & \geq & 0 \end{array}.$$

Het nieuwe lineaire programmeringsmodel is

$$
\begin{array}{lcllllll}
\text{maximaliseer } Z & = & 2x_1 & -3x_2 & +4x_3 & +3x_4 & & \\
\text{o.d.v.} & & x_1 & -x_2 & +2x_3 & & \leq & 7 \\
 & & 2x_1 & +x_2 & +3x_3 & -x_4 & \leq & 22 \\
 & & x_1 & -x_2 & +x_3 & +x_4 & \leq & 2 \\
 & & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq & 0
\end{array}.
$$

Het simplextableau waarmee we starten is

	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	b
Z	1	-2	3	-4	-3	0	0	0	0
s_1	0	1	-1	2	0	1	0	0	7
s_2	0	2	1	3	-1	0	1	0	22
s_3	0	1	-1	1	1	0	0	1	2

Nu kunnen we de simplexmethode toepassen, maar zoals je onderhand wel begrepen hebt, is dat over het algemeen veel rekenwerk. We gaan het op de slimme manier doen. De matrix onder Z en de slackvariabelen in het optimale simplextableau van het oorspronkelijke probleem is

$$
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.
$$

Omdat we alleen een nieuwe variabele toegevoegd hebben, berekenen we slechts

$$
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.
$$

We krijgen het volgende simplextableau

	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	b
Z	1	1	0	0	-1	1	0	2	11
x_2	0	-1	1	0	-2	1	0	-2	3
s_2	0	3	0	0	4	-4	1	5	4
x_3	0	0	0	1	-1	1	0	-1	5

Dit is geen optimaal simplextableau. x_4 wordt intredende variabele en s_2 wordt uittredende variabele. Het volgende simplextableau is

	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	b
Z	1	$1\frac{3}{4}$	0	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$3\frac{1}{4}$	12
x_2	0	$\frac{1}{2}$	1	0	0	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	5
x_4	0	$\frac{3}{4}$	0	0	1	-1	$\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{4}$	1
x_3	0	0	0	1	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	6

We zien dat alle gereduceerde kostencoëfficiënten niet-negatief zijn. Een optimale basisoplossing is $x_2 = 5$, $x_3 = 6$, $x_4 = 1$, $x_1 = 0$, $s_1 = 0$, $s_2 = 0$ en $s_3 = 0$. De optimale waarde is $Z = 12$.

Wat is een optimale oplossing als het nieuwe lineaire programmeringsmodel

$$
\begin{array}{lcllllll}
\text{maximaliseer } Z & = & 2x_1 & -3x_2 & +4x_3 & +x_4 & & \\
\text{o.d.v.} & & x_1 & -x_2 & +2x_3 & & \leq & 7 \\
 & & 2x_1 & +x_2 & +3x_3 & -x_4 & \leq & 22 \\
 & & x_1 & -x_2 & +x_3 & +x_4 & \leq & 2 \\
 & & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq & 0
\end{array}
$$

is? We gaan dit met behulp van het duale lineaire programmeringsmodel bekijken. Dit is

$$\begin{array}{llllll} \text{minimaliseer } W & = & 7y_1 & +22y_2 & +2y_3 & \\ \text{o.d.v.} & & y_1 & +2y_2 & +y_3 & \geq 2 \\ & & -y_1 & +y_2 & -y_3 & \geq -3 \\ & & 2y_1 & +3y_2 & +y_3 & \geq 4 \\ & & & -y_2 & +y_3 & \geq 1 \\ & & y_1, & y_2, & y_3 \geq & 0 \end{array}$$

Van het duale lineaire programmeringsmodel

$$\begin{array}{llllll} \text{minimaliseer } W & = & 7y_1 & +22y_2 & +2y_3 & \\ \text{o.d.v.} & & y_1 & +2y_2 & +y_3 & \geq 2 \\ & & -y_1 & +y_2 & -y_3 & \geq -3 \\ & & 2y_1 & +3y_2 & +y_3 & \geq 4 \\ & & y_1, & y_2, & y_3 \geq & 0 \end{array}$$

van het oorspronkelijke lineaire programmeringsmodel is $y_1 = 1$, $y_2 = 0$ en $y_3 = 2$ een optimale oplossing. Omdat deze toegelaten oplossing ook aan de nieuwe restrictie voldoet, is $y_1 = 1$, $y_2 = 0$ en $y_3 = 2$ een optimale oplossing voor het duale lineaire programmeringsmodel van het nieuwe lineaire programmeringsmodel. Complementaire slackness verteld ons dat $(-y_2 + y_3 - 1)x_4 = 0$ voor optimale oplossingen x_1, x_2, x_3, x_4 van het primale en y_1, y_2, y_3 van het duale. Omdat $-y_2 + y_3 - 1 \neq 0$ voor onze optimale oplossing, moet $x_4 = 0$ voor elke optimale oplossing van

$$\begin{array}{lllllll} \text{maximaliseer } Z & = & 2x_1 & -3x_2 & +4x_3 & +x_4 & \\ \text{o.d.v.} & & x_1 & -x_2 & +2x_3 & & \leq 7 \\ & & 2x_1 & +x_2 & +3x_3 & -x_4 & \leq 22 \\ & & x_1 & -x_2 & +x_3 & +x_4 & \leq 2 \\ & & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0 \end{array}$$

Toevoegen van een restrictie

In plaats van het over het hoofd zien van een product (lees beslissingsvariabelen) merk je dat vergeten bent een restrictie aan je lineaire programmeringsmodel toe te voegen. Je had het lineaire programmeringsmodel

$$\begin{array}{llllll} \text{maximaliseer } Z & = & 2x_1 & -3x_2 & +4x_3 & \\ \text{o.d.v.} & & x_1 & -x_2 & +2x_3 & \leq 7 \\ & & 2x_1 & +x_2 & +3x_3 & \leq 22 \\ & & x_1 & -x_2 & +x_3 & \leq 2 \\ & & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0 \end{array}$$

maar je bent vergeten om de restrictie

$$x_2 + x_3 \leq 9$$

toe te voegen. Het nieuwe lineaire programmeringsmodel is

$$\begin{array}{llllll} \text{maximaliseer } Z & = & 2x_1 & -3x_2 & +4x_3 & \\ \text{o.d.v.} & & x_1 & -x_2 & +2x_3 & \leq 7 \\ & & 2x_1 & +x_2 & +3x_3 & \leq 22 \\ & & x_1 & -x_2 & +x_3 & \leq 2 \\ & & & x_2 & +x_3 & \leq 9 \\ & & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0 \end{array}$$

Gelukkig hoeven we in dit geval niet veel te doen om na te gaan dat onze optimale oplossing een optimale oplossing is van het nieuwe lineaire programmeringsmodel. Inderdaad, de optimale oplossing is $x_1 = 0$, $x_2 = 3$ en $x_3 = 5$. Deze oplossing voldoet aan de nieuwe restrictie.

De directie wil nu echter dat we voor dit lineaire programmeringsmodel een optimaal simplextableau vinden (zucht!!).We starten met een optimaal simplextableau voor het oorspronkelijke probleem:

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b
Z	1	1	0	0	1	0	2	11
x_2	0	-1	1	0	1	0	-2	3
s_2	0	3	0	0	-4	1	5	4
x_3	0	0	0	1	1	0	-1	5

Nu gaan we de nieuwe restrictie toevoegen. Deze brengen we eerst in =-vorm door een slackvariabele toe te voegen:

$$x_2 + x_3 + s_4 = 9.$$

Daarna voegen we deze vergelijking toe aan het optimale simplextableau:

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	b
Z	1	1	0	0	1	0	2	0	11
x_2	0	-1	1	0	1	0	-2	0	3
s_2	0	3	0	0	-4	1	5	0	4
x_3	0	0	0	1	1	0	-1	0	5
s_4	0	0	1	1	0	0	0	1	9

Dit is echter geen correct simplextableau, omdat we onder x_2 and x_3 geen eenheidsvectoren zien staan. Met behulp van rij-operaties brengen we het in de juiste vorm en krijgen:

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	b
Z	1	1	0	0	1	0	2	0	11
x_2	0	-1	1	0	1	0	-2	0	3
s_2	0	3	0	0	-4	1	5	0	4
x_3	0	0	0	1	1	0	-1	0	5
s_4	0	1	0	0	-2	0	3	1	1

Als we i.p.v. de restrictie

$$x_2 + x_3 \leq 9,$$

de restrictie

$$x_2 + x_3 \leq 7$$

hadden toegevoegd, is de optimale oplossing van het oorspronkelijke lineaire programmeringsmodel geen toegelaten oplossing voor het nieuwe lineaire programmeringsmodel, omdat $x_2 + x_3 = 8 > 7$.

Verandering van linkerzijde constanten

Ons lineaire programmeringsmodel is

$$\begin{array}{llllllll}
\text{maximaliseer } Z & = & 2x_1 & -3x_2 & +4x_3 & & \\
\text{o.d.v.} & & x_1 & -x_2 & +2x_3 & \leq & 7 \\
 & & 2x_1 & +x_2 & +3x_3 & \leq & 22 & . \\
 & & x_1 & -x_2 & +x_3 & \leq & 2 \\
 & & x_1, & x_2, & x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

hebben we een linkerzijde constante foutief ingevoerd, i.p.v.

$$x_1 - x_2 + x_3 \leq 2$$

hadden we

$$2x_1 - x_2 + x_3 \leq 2.$$

Ons lineaire programmeringsmodel wordt

$$\begin{array}{lcllll} \text{maximaliseer } Z & = & 2x_1 & -3x_2 & +4x_3 & \\ \text{o.d.v.} & & x_1 & -x_2 & +2x_3 & \leq 7 \\ & & 2x_1 & +x_2 & +3x_3 & \leq 22 \\ & & 2x_1 & -x_2 & +x_3 & \leq 2 \\ & & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0 \end{array}.$$

Hoe gaan we nu te werk? Het simplex tableau waarmee we starten wordt

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b
Z	1	-2	3	-4	0	0	0	0
s_1	0	1	-1	2	1	0	0	7
s_2	0	2	1	3	0	1	0	22
s_3	0	2	-1	1	0	0	1	2

Nu kunnen we de simplexmethode toepassen, maar dat is teveel werk.

Van ons oorspronkelijke lineaire programmeringsmodel hadden we een optimale simplextableau gevonden

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b
Z	1	1	0	0	1	0	2	11
x_2	0	-1	1	0	1	0	-2	3
s_2	0	3	0	0	-4	1	5	4
x_3	0	0	0	1	1	0	-1	5

Hieruit kunnen we de matrix onder Z en de slackvariabelen aflezen. Deze matrix gaan we gebruiken om een simplextableau te vinden voor onze nieuwe lineaire programmeringsmodel. Omdat in het nieuwe lineaire programmeringsmodel alleen de kolom onder x_1 verandert, berekenen we

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Voor ons nieuwe lineaire programmeringsmodel krijgen we dus als simplextableau

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b
Z	1	3	0	0	1	0	2	11
x_2	0	-3	1	0	1	0	-2	3
s_2	0	8	0	0	-4	1	5	4
x_3	0	-1	0	1	1	0	-1	5

Omdat alle gereduceerde kostencoëfficiënten niet-negatief zijn, is $x_2 = 3$, $s_2 = 4$, $x_3 = 5$, $x_1 = 0$, $s_1 = 0$ en $s_3 = 0$ een optimale basisoplossing en is $Z = 11$ de optimale waarde.

We gaan het lineaire programmeringsmodel weer veranderen. In plaats van

$$x_1 - x_2 + x_3 \leq 2$$

krijgen we nu

$$\Delta x_1 - x_2 + x_3 \leq 2.$$

Ons lineaire programmeringsmodel wordt

$$\begin{array}{lcllll} \text{maximaliseer } Z & = & 2x_1 & -3x_2 & +4x_3 & \\ \text{o.d.v.} & & x_1 & -x_2 & +2x_3 & \leq 7 \\ & & 2x_1 & +x_2 & +3x_3 & \leq 22 \\ & & \Delta x_1 & -x_2 & +x_3 & \leq 2 \\ & & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0 \end{array}.$$

Voor welke waarde van Δ zal $x_1 = 0$, $x_2 = 3$ en $x_3 = 5$ nog steeds een optimale oplossing zijn?

Het simplextableau waarmee we starten is nu

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b
Z	1	-2	3	-4	0	0	0	0
s_1	0	1	-1	2	1	0	0	7
s_2	0	2	1	3	0	1	0	22
s_3	0	Δ	-1	1	0	0	1	2

Omdat in het nieuwe lineaire programmeringsmodel alleen de kolom onder x_1 verandert, berekenen we

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ \Delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2\Delta \\ 1-2\Delta \\ -2+5\Delta \\ 1-\Delta \end{pmatrix}.$$

Voor ons nieuwe lineaire programmeringsmodel krijgen we dus als simplextableau

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b
Z	1	$-1+2\Delta$	0	0	1	0	2	11
x_2	0	$1-2\Delta$	1	0	1	0	-2	3
s_2	0	$-2+5\Delta$	0	0	-4	1	5	4
x_3	0	$1-\Delta$	0	1	1	0	-1	5

Als $-1+2\Delta \geq 0$, dus als $\Delta \geq \frac{1}{2}$, zal $x_2 = 3$, $s_2 = 4$, $x_3 = 5$, $x_1 = 0$, $s_1 = 0$ en $s_3 = 0$ een optimale basisoplossing en $Z = 11$ de optimale waarde zijn. Als $-1 + 2\Delta < 0$, dan is de gereduceerde kostencoëfficiënt van x_1 negatief en moeten we de minimum ratio test uitvoeren en pivotten om een nieuwe simplexteableau.