1 Wat zijn geheeltallige lineair programmeringsmodellen

Een lineair programmeringsmodel heeft de vorm

$$\begin{array}{llll} \substack{\text{maximaliseer of} \\ \text{minimaliseer}} Z & = & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\ \text{o.d.v.} & & \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_i & \begin{array}{c}\leq\\=\\\geq\end{array} \; b_i \text{ voor } i = 1, \ldots, m \\ & & x_i & \geq \; 0 \text{ voor sommige beslissingsvariabelen} \end{array}$$

Hierbij zijn de c_j's, $a_{i,j}$'s en de b_i's constanten. Let op dat er op de beslissingsvariabelen geen geheeltalligheidsrestricties zijn.

Een voorbeeld van een lineair programmeringsmodel is

$$\begin{array}{lllll} \text{maximaliseer } Z & = & x_2 & & \\ \text{o.d.v.} & & -100x_1 & +x_2 & \leq & 1 \\ & & x_1 & +\frac{1}{100}x_2 & \leq & 1 \\ & & x_1 & , x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Als we eisen dat alle beslissingsvariabelen geheeltallig moeten zijn dan noemen we het een geheeltallig lineair programmeringsmodel. In het engels wordt de benaming integer lineair programming model, vandaar dat we de afkorting ILP voor geheeltallig lineair programmeringsmodel zullen gebruiken. Een voorbeeld is

$$\begin{array}{llllll} \text{maximaliseer } Z & = & x_2 & & & \\ \text{o.d.v.} & & -100x_1 & +x_2 & \leq & 1 \\ & & x_1 & +\frac{1}{100}x_2 & \leq & 1 \\ & & x_1 & , x_2 & \geq & 0 \\ & & x_1 & , x_2 & & \text{geheeltallig} \end{array}$$

Als we eisen dat sommige beslissingsvariabelen geheeltallig moeten zijn, dan noemen we het een gemengd geheeltallig lineair programmeringsmodel. Dit wordt in het engels mixed integer lineair programming model genoemd. We zullen daarom de afkorting MILP gebruiken.

Als we eisen dat alle beslissingsvariabelen waarde 0 of 1 moeten hebben, dan noemen we het een 0-1 lineair programmeringsmodel. Dit wordt in het engels binary integer programming model genoemd. De afkorting is BIP.

2 We kunnen GEEN simplexmethode gebruiken voor geheeltallige lineaire programmeringsmodellen

In de voorgaande weken zag je dat de simplexmethode gebruikt kan worden om lineair programmeringsmodel op te lossen. Voor de geheeltallige lineaire programmeringsmodellen kunnen we dat NIET doen. Ook bestaat er GEEN duale geheeltallig lineaire programmeringsmodellen, en kunnen we GEEN gevoeligheidsanalyse toepassen op geheeltallige lineaire programmeringsmodellen. Kort samengevat kunnen we wat we de voorgaande weken geleerd hebben NIET gebruiken om geheeltallige lineaire programmeringsmodel op te lossen.

Wat is de optimale waarde van het volgende lineair programmeringsmodel

$$\begin{array}{llllll} \text{maximaliseer } Z & = & x_2 & & & \\ \text{o.d.v.} & & -100x_1 & +x_2 & \leq & 1 \\ & & x_1 & +\frac{1}{100}x_2 & \leq & 1 \\ & & x_1 & , x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Met behulp van de grafische methode of de simplexmethode is eenvoudig na te gaan dat $x_1 = \frac{99}{200}$ en $x_2 = 50\frac{1}{2}$ een optimale oplossing is en dat de optimale waarde gelijk is aan $50\frac{1}{2}$.

Laten we nu geheeltalligheidsrestrictie toevoegen aan dit lineair programmeringsmodel. We krijgen

$$\begin{array}{llllll} \text{maximaliseer } Z & = & x_2 & & & \\ \text{o.d.v.} & & -100x_1 & +x_2 & \leq & 1 \\ & & x_1 & +\frac{1}{100}x_2 & \leq & 1 \\ & & x_1 & , x_2 & \geq & 0 \\ & & x_1 & , x_2 & & \text{geheeltallig} \end{array}$$

Uit de restrictie $x_1 + \frac{1}{100}x_2 \leq 1$ volgt dat x_1 slechts de waarde 0 en 1 aan kan nemen. Als $x_1 = 1$, dan moet $x_2 = 0$ en is $Z = 0$. Als $x_1 = 0$, dan volgt uit de restrictie $-100x_1 + x_2 \leq 1$ dat $x_2 \leq 1$. We zien dus dat $x_1 = 0$ en $x_2 = 1$ een optimale oplossing is en dat de optimale waarde $Z = 1$ is.

We zien dus dat er een enorm verschil kan zijn tussen de optimale waarde van een lineair programmeringsmodel en hetzelfde lineair programmeringsmodel waaraan we geheeltalligheidsrestricties hebben toegevoegd. We zien ook dat afronden NIET werkt.

3 Waarom gebruiken we geheeltallige lineair programmeringsmodellen?

Geheeltallige programmeringsmodellen kunnen gebruikt worden om een groot aantal problemen te modelleren.

3.1 Keuzes maken

We hebben het volgende voorbeeld. Je hebt een knapzak dat slechts een totaal gewicht kan dragen van hooguit K gram. Verder heb je een aantal voorwerpen, n in totaal. Elk van deze voorwerpen heeft een bepaalde gewicht w_i en een bepaalde waarde c_i. Je wilt een aantal van deze voorwerpen in de knapzak stoppen zodanig dat de totale waarde van de voorwerpen in de knapzak maximaal is en de knapzak deze voorwerpen kan dragen.

Om dit probleem op te lossen, voeren we voor elke voorwerp een beslissingsvariabele x_i met waarde 0 of 1 in. Deze beslissingsvariabele laten we gelijk aan 0 zijn als we voorwerp i niet in de knapzak stoppen en we laten het gelijk aan 1 zijn als we voorwerp i wel in de knapzak stoppen. Omdat de knapzak een gewicht van hooguit K gram kan dragen hebben we de restrictie

$$\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leq K.$$

We willen de totale waarde van de voorwerpen in de knapzak maximaal hebben. De totale waarde is

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i.$$

We krijgen dus het volgende geheeltallige lineaire programmeringsmodel

$$\begin{array}{lllll} \text{maximaliseer } Z & = & \sum_{i=1}^{n} c_i x_i & & \\ \text{o.d.v.} & & \sum_{i=1}^{n} w_i x_i & \leq & K \\ & & \text{elke } x_i \text{ is 0 of 1} & & \end{array}$$

3.2 Slechts aan k restricties van m restricties wordt voldoen

Veronderstel dat we m restrictie van de vorm

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \leq b_i \text{ voor } i = 1, \ldots, m.$$

hebben. Maar $x_1, \ldots, x_n$ hoeven slechts aan k van deze restrictie te voldoen. Hoe kunnen we dit modelleren?

Neem een enorm groot getal M. Dan kunnen we dit modelleren door

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j \leq b_i + My_i \text{ for } i = 1, \ldots, m.$$

en

$$y_1 + \ldots + y_m = m - k,$$

waarbij y_i een 0-1 variabele is voor $i = 1, \ldots, n$. De interpretatie van de variabelen y_i is als volgt:

$$y_i = \begin{cases} 0 & \text{als de } i\text{de restrictie gebruikt wordt} \\ 1 & \text{als de } i\text{de restrictie niet gebruikt wordt.} \end{cases}$$

3.3 Variabelen die slechts een aantal waarden mogen aannemen

Veronderstel dat we de restrictie hebben dat de beslissingsvariabele x_j slechts een aantal waarden mag aannemen. Dus

$$x_j = b_1, \ldots, \text{ of}, b_r.$$

Bijvoorbeeld, we kunnen de restrictie hebben dat de beslissingsvariabele x_j slechts de waarden $-7\frac{1}{3}, -3, 4\frac{1}{2}$ of 18 mag aannemen. Hoe kunnen we dit modelleren?

We introduceren 0-1 variabelen $y_1, \ldots, y_r$, voegen de restrictie

$$y_1 + \cdots + y_r = 1,$$

en vervangen de restrictie $x_j = b_1, \ldots, \text{ of}, b_r$ door

$$x_j = \sum_{i=1}^{r} b_i y_i.$$

Omdat $y_1 + \cdots + y_r = 1$, is slechts één van de variabele y_i gelijk aan 1, de andere zijn gelijk aan 0. Als $y_i = 1$, dan is dus

$$x_j = b_i.$$

In ons voorbeeld introduceren we dus vier 0-1 variabelen y_1, y_2, y_3, y_4, en vervangen de restrictie dat

$$x_j = -7\frac{1}{3}, -3, 4\frac{1}{2} \text{ of } 18$$

door

$$\begin{aligned} x_j &= -7\frac{1}{3}y_1 - 3y_2 + 4\frac{1}{2}y_3 + 18y_4 \\ y_1 + \cdots + y_4 &= 1 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 & \quad \text{zijn 0-1 variabelen} \end{aligned}$$

Veronderstel nu dat we een gelijkheidsrestrictie

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b_1, \ldots, \text{ or}, b_r.$$

hebben waarbij de rechterzijde constanten meer dan slechts één waarde kunnen aannemen. Bijvoorbeeld, we hebben de restrictie

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, 3, \text{of } 7.$$

We vervangen zo een restrictie door

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_j x_j &= \sum_{k=1}^{r} b_k y_k \\ \sum_{k=1}^{r} y_k &= 1 \\ \text{elke } y_k \text{ is} & \quad \text{0-1 variabele voor elke } k \end{aligned}$$

Omdat $y_1 + \cdots + y_r = 1$, is slechts één van de variabele y_i gelijk aan 1, de andere zijn gelijk aan 0. Als $y_i = 1$, dan is dus

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b_i.$$

In het voorbeeld krijgen we dus

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= y_1 + 3y_2 + 7y_3 \\ y_1 + y_2 + y_3 &= 1 \\ y_1, y_2, y_3 \text{ zijn} & \quad \text{0-1 variabelen} \end{aligned}$$

3.4 Een voorbeeld

De R&D afdeling van een bedrijf vertelt de directie dat het mogelijk is om drie nieuwe producten te introduceren. De directie vertelt dat het toegestaan is om ten hoogste twee nieuwe producten te introduceren. Het bedrijf heeft twee fabrieken. De directie wil van slechts één van deze fabrieken gebruik maken om de nieuwe producten te maken. De beschikbaarheid van elke fabriek en productieduur van elke product in elke fabriek staat in de volgende tabel:

	uren nodig om het te produceren			
	product 1	product 2	product 3	beschikbaarheid in uren
fabriek 1	3	4	2	30
fabriek 2	4	6	2	40

Van product 1 zullen per week hoogstens 7 ladingen verkocht worden, van product 2 zullen per week hoogstens 5 ladingen verkocht worden en van product 3 zullen per week hoogstens 9 ladingen verkocht worden. De winst voor één lading van product 1 is 5, voor één lading van product 2 is 7, en voor één lading van product 3 is 3.

De hoeveelheid ladingen dat van product i gemaakt wordt, geven we aan met x_i. De restrictie gegeven door de eerste fabriek is

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 30$$

en van de tweede fabriek is

$$4x_1 + 6x_2 + 2x_3 \leq 40.$$

Omdat slechts één fabriek mag gebruikt worden, moeten x_1, x_2, x_3 aan slechts één van deze restricties voldoen. Introduceer een 0-1 variabele w. De interpretatie van w is als volgt:

$$w_1 = \begin{cases} 1 & \text{als fabriek 1 gebruikt wordt} \\ 0 & \text{als fabriek 2 gebruikt wordt.} \end{cases}$$

De restricties worden

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\leq 30 + Mw \\ 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 &\leq 40 + M(1 - w). \end{aligned}$$

Van product 1 zullen per week hoogstens 7 ladingen verkocht worden, van product 2 zullen per week hoogstens 5 ladingen verkocht worden en van product 3 zullen per week hoogstens 9 ladingen verkocht worden. We hebben dus de volgende restricties

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 7 \\ x_2 &\leq 5 \\ x_3 &\leq 9. \end{aligned}$$

Met de restrictie opgelegd door de directie kunnen hooguit twee nieuwe producten gemaakt worden. We introduceren 0-1 variabelen y_1, y_2, y_3. Deze hebben de interpretatie

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{als product } i \text{ gemaakt wordt} \\ 0 & \text{als product } i \text{ niet gemaakt wordt.} \end{cases}$$

Neem een enorm groot getal M. We voegen de volgende restrictie toe

$$\begin{aligned} x_1 &\leq My_1 \\ x_2 &\leq My_2 \\ x_3 &\leq My_3 \\ y_1 + y_2 + y_3 &\leq 2 \end{aligned}$$

en elke variabele y_i is 0-1 variabele.

De winst voor één lading van product 1 is 5, voor één lading van product 2 is 7, en voor één lading van product 3 is 3. De winst is dus

$$Z = 5x_1 + 7x_2 + 3x_3.$$

In totaal hebben we dus het volgende geheeltallige lineaire programmeringsmodel

$$\begin{array}{lcll} \text{maximaliseer } Z & = & 5x_1 + 7x_2 + 3x_3 & \\ \text{o.d.v.} & & x_1 & \leq 7 \\ & & x_2 & \leq 5 \\ & & x_3 & \leq 9 \\ & & x_1 & \leq My_1 \\ & & x_2 & \leq My_2 \\ & & x_3 & \leq My_3 \\ & & y_1 + y_2 + y_3 & \leq 2 \\ & & 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 & \leq 30 + Mw \\ & & 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 & \leq 40 + M(1-w) \\ & & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 & \\ & & y_1, y_2, y_3 \text{ 0-1 variabelen} & \\ & & w \text{ 0-1 variabele} & \end{array}$$

3.5 Restrictie afdwingen

We kunnen geheeltallig programmeren ook gebruiken om restrictie af te dwingen: beslissing A kan alleen genomen worden als ook beslissing B genomen is. (Dit laat echter nog wel toe dat we beslissing B nemen maar niet beslissing A.)

We hebben n locaties om fabrieken te bouwen ter beschikking. Het bouwen van een fabriek op locatie j kost ons c_j. Als we locatie j niet gebruiken kost ons dat niets. We hebben m klanten die goederen geleverd moeten krijgen uit deze fabrieken. Elke klant krijgt de goederen uit slechts één fabriek geleverd. Als de fabriek op locatie j aan klant i levert, hebben we kosten $d_{i,j}$. Het probleem is om te bepalen op welke locaties fabrieken gebouwd moeten worden zodanig dat de totale kosten minimaal zijn.

We voeren beslissingsvariabelen $y_1, \ldots, y_n$ met waarde 0-1 in. Als er een fabriek op locatie j gebouwd wordt, is $y_j = 1$ en als op locatie j geen fabriek gebouwd wordt, is $y_j = 0$. Verder voeren we beslissingvariabelen $x_{i,j}$ met waarde 0-1 in. Als goederen van klant i vanuit de fabriek op locatie j geleverd worden, dan is $x_{i,j} = 1$. Als de fabriek op locatie j geen goederen levert aan klant i, dan is $x_{i,j} = 0$.

Omdat elke klant goederen van slechts één fabriek geleverd krijgt, hebben we de restrictie

$$\sum_{j=1}^{n} x_{i,j} = 1.$$

voor $i = 1, \ldots, m$.

Omdat goederen vanuit locatie j aan klant i geleverd kan worden als er op locatie j een fabriek gebouwd is, hebben we de restrictie

$$x_{i,j} \leq y_j$$

voor $i = 1, \ldots, m$ en $j = 1, \ldots, n$.

De totale bouwkosten om de fabrieken te bouwen is

$$\sum_{j=1}^{n} c_j y_j,$$

en de totale leveringskosten om vanuit de fabrieken goederen te leveren aan de klanten is

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} d_{i,j} x_{i,j}.$$

De totale kosten is dus

$$\sum_{j=1}^{n} c_j y_j + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} d_{i,j} x_{i,j}.$$

We hebben dus het volgende geheeltallige lineaire programmeringsmodel

minimaliseer Z	$=$	$\sum_{j=1}^{n} c_j y_j + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} d_{i,j} x_{i,j}$	
o.d.v.		$\sum_{j=1}^{n} x_{i,j} = 1$	voor $i = 1, \ldots, m$
		$x_{i,j} \leq y_j$	voor $i = 1, \ldots, m$ en $j = 1, \ldots, n$
		$x_{i,j}$ $0-1$ variabele	voor $i = 1, \ldots, m$ en $j = 1, \ldots, n$
		y_j $0-1$ variabele	voor $j = 1, \ldots, n$

3.6 Nog een voorbeeld

We hebben n producten, waarbij elke product geproduceerd wordt op een eigen machine. De productiekosten van product i is c_i. Als we x_i maken van product i, hebben we dus kosten $c_i x_i$. De x_i's voldoen nog aan andere restrictie. We willen de totale productiekosten minimaliseren. We modelleren de doelfunctie als

$$\text{minimaliseer } Z = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n.$$

We hebben nu echter het volgende probleem: als we machine i gebruiken, hebben we opstartkosten d_i. Dus als $x_i > 0$, dan krijgen we nog extra kosten van d_i. Als we machine i niet gebruiken, dan hebben we deze opstartkosten niet. Hoe modelleren we dit?

Neem een enorm groot getal M. Introduceer 0-1 variabelen $y_1, \ldots, y_n$ en voeg de restricties

$$x_i \leq M y_i$$

toe. De totale kosten worden nu

$$Z = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n + d_1 y_1 + \cdots + d_n y_n.$$

De interpretatie is als volgt: Als $x_i > 0$, dan dwingen we $y_i = 1$. Als $x_i = 0$, dan dwingen $y_i = 0$ omdat we de Z minimaliseren.