

We kunnen de simplexmethode **NIET** rechtstreeks gebruiken om een optimale oplossing te vinden van een geheeltallig lineair programmeringsmodel. Wat kunnen we wel gebruiken?

Stel we hebben het volgende 0-1 geheeltallig lineair programmeringsmodel (BIP)

$$\begin{array}{rcllcl}
 \text{maximaliseer } Z & = & 9x_1 & +5x_2 & +6x_3 & +4x_4 & & & & \\
 \text{o.d.v.} & & 6x_1 & +3x_2 & +5x_3 & +2x_4 & \leq & 10 & & \\
 & & & & x_3 & +x_4 & \leq & 1 & & \\
 & & -x_1 & & +x_3 & & \leq & 0 & & \\
 & & & -x_2 & & +x_4 & \leq & 0 & & \\
 & & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & & & & 0\text{-1 variabelen}
 \end{array}$$

- Dom algoritme: alle toegelaten oplossingen langsgaan en die oplossing pakken waarvoor de doelstellingsfunctie maximale waarde heeft.
- Teveel werk, we gaan het slimmer aanpakken. **Branch-and-bound**.

We zwakken de restricties dat  $x_1, x_2, x_3, x_4$  0 – 1 moeten zijn af tot

$$0 \leq x_1 \leq 1$$

$$0 \leq x_2 \leq 1$$

$$0 \leq x_3 \leq 1$$

$$0 \leq x_4 \leq 1$$

We schrijven  $Z^{\text{LP}}$  voor de optimale waarde van dit lineair programmeringsmodel. Dit wordt de **LP-relaxatie** genoemd.

### Bovengrens

Voor de optimale waarde  $Z$  van het BIP geldt dat

$$Z \leq Z^{\text{LP}}.$$

- In ons geval  $Z^{\text{LP}} = 16\frac{1}{2}$  en  $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\frac{5}{6}, 1, 0, 1)$  een optimale oplossing is.

We zwakken de restricties dat  $x_1, x_2, x_3, x_4$  0 – 1 moeten zijn af tot

$$0 \leq x_1 \leq 1$$

$$0 \leq x_2 \leq 1$$

$$0 \leq x_3 \leq 1$$

$$0 \leq x_4 \leq 1$$

We schrijven  $Z^{\text{LP}}$  voor de optimale waarde van dit lineair programmeringsmodel. Dit wordt de **LP-relaxatie** genoemd.

### Bovengrens

Voor de optimale waarde  $Z$  van het BIP geldt dat

$$Z \leq Z^{\text{LP}}.$$

- In ons geval  $Z^{\text{LP}} = 16\frac{1}{2}$  en  $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\frac{5}{6}, 1, 0, 1)$  een optimale oplossing is.
- Optimale waarde van het BIP is ten hoogste  $16\frac{1}{2}$ .
- Ja, het is zelfs ten hoogste 16.

$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\frac{5}{6}, 1, 0, 1)$  is niet 0 – 1. We splitsen het BIP in twee deelproblemen.

- 1 het BIP waarbij  $x_1 = 0$ , en
- 2 het BIP waarbij  $x_1 = 1$ .

Dit wordt **vertakken (branching)** genoemd.

$$x_1 = 0.$$

$$\begin{array}{rcll} \text{maximaliseer } Z & = & 5x_2 & +6x_3 & +4x_4 & & & \\ \text{o.d.v.} & & 3x_2 & +5x_3 & +2x_4 & \leq & 10 & \\ & & & x_3 & +x_4 & \leq & 1 & \\ & & & x_3 & & \leq & 0 & \\ & & -x_2 & & +x_4 & \leq & 0 & \\ & & x_2, & x_3, & x_4 & & & 0-1 \text{ variabelen} \end{array}$$

- Optimale waarde LP-relaxatie is  $Z^{\text{LP}} = 9$
- Optimale oplossing is  $(x_2, x_3, x_4) = (1, 0, 1)$ . Dit is 0 – 1, dus de optimale waarde  $Z$  voor het oorspronkelijke BIP voldoet aan  $9 \leq Z$ . Noteer deze waarde en oplossing. We hoeven bij dit deelprobleem niet verder te branchen.

$$x_1 = 1.$$

$$\begin{array}{rcll} \text{maximaliseer } Z & = & 5x_2 & +6x_3 & +4x_4 & +9 \\ \text{o.d.v.} & & 3x_2 & +5x_3 & +2x_4 & \leq 4 \\ & & & x_3 & +x_4 & \leq 1 \\ & & & x_3 & & \leq 1 \\ & & -x_2 & & +x_4 & \leq 0 \\ & & x_2, & x_3, & x_4 & \quad 0-1 \text{ variabelen} \end{array}$$

(Merk op dat dit geen lineair programmeringsmodel is omdat de doelfunctie niet lineair is. Los eerst het probleem op met  $5x_2 + 6x_3 + 4x_4$  en tel 9 bij de optimale waarde op.)

- Optimale waarde LP-relaxatie is  $Z^{\text{LP}} = 16\frac{1}{5}$ .
- Optimale oplossing is  $(x_2, x_3, x_4) = (\frac{4}{5}, 0, \frac{4}{5})$ . Niet 0 – 1 en de optimale waarde is groter dan 9, de beste waarde voor de BIP tot nu toe gevonden.
- We branchen hier op  $x_2 = 0$  en  $x_2 = 1$ .

$$x_2 = 0.$$

$$\begin{array}{rcll} \text{maximaliseer } Z & = & 6x_3 & +4x_4 & +9 \\ \text{o.d.v.} & & 5x_3 & +2x_4 & \leq 4 \\ & & x_3 & +x_4 & \leq 1 \\ & & x_3 & & \leq 1 \\ & & & x_4 & \leq 0 \\ & & x_3, & x_4 & \text{0-1 variabelen} \end{array}$$

- LP-relaxatie heeft optimale waarde  $Z^{\text{LP}} = 13\frac{4}{5}$ .
- Optimale oplossing  $(x_3, x_4) = (\frac{4}{5}, 0)$ .

$$x_2 = 1.$$

$$\begin{array}{rcll} \text{maximaliseer } Z & = & 6x_3 & +4x_4 & +14 \\ & & 5x_3 & +2x_4 & \leq & 1 \\ & & x_3 & +x_4 & \leq & 1 \\ & & x_3 & & \leq & 1 \\ & & & x_4 & \leq & 1 \\ & & x_3, & x_4 & & 0\text{-1 variabelen} \end{array}$$

- LP-relaxatie heeft optimale waarde  $Z^{\text{LP}} = 16$ .
- Optimale oplossing  $(x_3, x_4) = (0, \frac{1}{2})$ .

We kiezen het laatste deelprobleem. Branchen op  $x_3 = 0$  and  $x_3 = 1$ .  
 $x_3 = 0$ .

$$\begin{array}{rcl} \text{maximaliseer } Z & = & 4x_4 + 14 \\ \text{o.d.v.} & & 2x_4 \leq 1 \\ & & x_4 \leq 1 \\ & & x_4 \leq 1 \\ & & x_4 \quad \quad \quad 0-1 \text{ variabele} \end{array}$$

- LP-relaxatie heeft optimale waarde  $Z^{\text{LP}} = 16$ .
- Optimale oplossing  $x_4 = \frac{1}{2}$ .

$$x_3 = 1.$$

$$\begin{aligned} \text{maximaliseer } Z &= 4x_4 + 20 \\ 2x_4 &\leq -4 \\ x_4 &\leq 0 \\ x_4 &\leq 1 \\ x_4 &\quad 0\text{-1 variabele} \end{aligned}$$

Niet toegelaten. Branchen niet in deelproblemen. We mogen deze knoop wegsnoeien.

We branchen

$$\begin{array}{rcl} \text{maximaliseer } Z & = & 4x_4 + 14 \\ \text{o.d.v.} & & 2x_4 \leq 1 \\ & & x_4 \leq 1 \\ & & x_4 \leq 1 \\ & & x_4 \quad \quad \quad 0-1 \text{ variabele} \end{array}$$

in deelproblemen met  $x_4 = 0$  en  $x_4 = 1$ .

- Voor  $x_4 = 0$  krijgen we  $Z^{\text{LP}} = 14$ . Hoera, we hebben een beter waarde gevonden voor het BIP:  $Z = 14$  en toegelaten oplossing  $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 1, 0, 0)$ . We noteren deze optimale waarde en oplossing.
- Deelprobleem met  $x_4 = 1$  is niet toegelaten. We mogen deze wegsnoeien.

We hoeven

$$\begin{array}{rcll} \text{maximaliseer } Z & = & 6x_3 & +4x_4 & +9 \\ \text{o.d.v.} & & 5x_3 & +2x_4 & \leq 4 \\ & & x_3 & +x_4 & \leq 1 \\ & & x_3 & & \leq 1 \\ & & & x_4 & \leq 0 \\ & & x_3, & x_4 & \text{0-1 variabelen} \end{array}$$

niet te branchen in deelproblemen. Waarom?

We hoeven

$$\begin{array}{rcll} \text{maximaliseer } Z & = & 6x_3 & +4x_4 & +9 \\ \text{o.d.v.} & & 5x_3 & +2x_4 & \leq 4 \\ & & x_3 & +x_4 & \leq 1 \\ & & x_3 & & \leq 1 \\ & & & x_4 & \leq 0 \\ & & x_3, & x_4 & \text{0-1 variabelen} \end{array}$$

niet te branchen in deelproblemen. Waarom?  $Z^{\text{LP}} = 13\frac{4}{5} \leq 14$ . We mogen deze knoop wegsnoeien.

Wat hebben we gedaan?

We maakten een binary boom. De vertakkingen in de boom laten zien of we  $x_i = 0$  of  $x_i = 1$  kozen. We vertakten bij een knoop niet in deelproblemen als

- 1 de optimale oplossing van de LP-relaxatie geheeltallig is,
- 2  $\lfloor Z^{LP} \rfloor$ , het grootste gehele getal kleiner dan  $Z^{LP}$ , kleiner is dan de tot nog toe beste gevonden oplossing, of
- 3 de LP-relaxatie niet toegelaten is.

Als één van deze drie voldaan is, zeggen we dat de knoop weggesnoeid (pruned) is.

## Branch-and-bound voor ILP's and MILP's

Stel we hebben het volgende geheeltallig lineair programmeringsmodel:

$$\begin{aligned} \text{maximaliseer } Z &= 2x_1 + 3x_2 \\ 5x_1 + 7x_2 &\leq 35 \\ 4x_1 + 9x_2 &\leq 36 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \text{ geheeltallig} \end{aligned}$$

Als we de restricties dat de beslissingvariabelen geheeltallig moeten zijn weghalen, krijgen we de LP-relaxatie. De LP-relaxatie heeft optimale waarde  $Z^{\text{LP}} = 14\frac{8}{17}$  en optimale oplossing  $x_1 = 3\frac{12}{17}$  and  $x_2 = 2\frac{6}{17}$ . De optimale oplossing van het geheeltallige lineaire programmeringsmodel voldoet aan één van de volgende restricties:

- $x_2 \leq 2$ , of
- $x_2 \geq 3$ .

We branchen op deze twee keuzes.

$$x_2 \leq 2:$$

$$\begin{aligned} \text{maximaliseer } Z &= 2x_1 + 3x_2 \\ 5x_1 + 7x_2 &\leq 35 \\ 4x_1 + 9x_2 &\leq 36 \\ x_2 &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \text{ geheeltallig} \end{aligned}$$

De LP-relaxatie heeft optimale waarde  $Z^{\text{LP}} = 14\frac{2}{5}$  en optimale oplossing  $x_1 = 4\frac{1}{5}$  and  $x_2 = 2$ .

$x_1$  is geen geheel getal. We branchen op

- $x_1 \leq 4$ , and
- $x_1 \geq 5$ .

$$x_1 \leq 4:$$

$$\begin{array}{rcll} \text{maximaliseer } Z & = & 2x_1 & +3x_2 \\ \text{o.d.v.} & & 5x_1 & +7x_2 \leq 35 \\ & & 4x_1 & +9x_2 \leq 36 \\ & & & x_2 \leq 2 \\ & & x_1 & \leq 4 \\ & & x_1, & x_2 \geq 0 \text{ geheeltallig} \end{array}$$

De LP-relaxatie heeft optimale waarde  $Z^{\text{LP}} = 14$  en optimale oplossing  $x_1 = 4$  en  $x_2 = 2$ .

We hebben een geheeltallige toegelaten oplossing. Betekent nog niet dat we een optimale oplossing voor de ILP hebben gevonden. We weten optimale waarde ILP is tenminste 14.

$x_1 \geq 5$ . De LP-relaxatie heeft optimale waarde  $Z^{\text{LP}} = 14\frac{2}{7}$ . We kunnen deze knoop wegsnoeien (prune).

Ga terug naar de eerste branching en stel nu  $x_2 \geq 3$ . De LP-relaxatie heeft optimale waarde  $Z^{\text{LP}} = 13\frac{1}{2}$ . We kunnen deze knoop wegsnoeien.

Optimale waarde voor het ILP is  $Z = 14$  en optimale oplossing  $x_1 = 4$  en  $x_2 = 2$ .

Ook hier maken we een binaire boom. Bij elke knoop controleren we of één van de volgende voldoet:

- optimale oplossing voor de LP-relaxatie is geheeltallig,
- $\lfloor Z^{LP} \rfloor$ , het grootste gehele getal kleiner dan  $Z^{LP}$ , kleiner is dan de tot nog toe beste gevonden oplossing, of
- de LP-relaxatie is niet toegelaten.

Als aan één van deze voldoen is, snoeien we de knoop weg. Als aan geen van deze voldoen is, branchen we in deze knoop.