Tentamen Automatentheorie en Formele Talen

Vakcode 2M130, 28 juni 2002, 9.00 - 12.00 uur

(Met uitwerking)

Dit tentamen bestaat uit drie opgaven met in totaal tien onderdelen die elk een punt kunnen opleveren. Daarnaast kan met de inleveropgaven een bonus van maximaal een punt behaald worden, met dien verstande dat het eindcijfer niet boven de tien uitkomt. Wie voor een bonus in aanmerking wil komen dient de naam van de instructieleider te vermelden.

Voor alle vragen geldt: motiveer uw antwoord. Zo zal een antwoord alleen bestaande uit 'ja' of 'nee' op vraag 1a geheel fout worden gerekend.

Opgave 1.

Gegeven is de grammatica G beschreven door de volgende producties:

$$\begin{array}{rcl} S & \to & aA \mid bB \\ A & \to & cS \mid bB \\ B & \to & a \mid cA. \end{array}$$

a. Is G ambigu?

Toelichting en uitwerking:

Nee, want G is een simpele grammatica: elke rechterkant van een productie begint met een terminal en voor elke variabele X en elke terminal x is er hoogstens één productie voor X waarvan de rechterkant begint met x.

b. Geef een reguliere expressie r met $L(r) = L(G)$.

Toelichting en uitwerking:

Hier kun je het makkelijkst eerst een nfa M maken met $L(M) = L(G)$. Deze heeft vier toestanden S, A, B, C waarvan S de begintoestand is en C de enige eindtoestand. De transitiefunctie δ is als volgt gedefinieerd:

$$\delta(S,a) = \{A\}, \;\; \delta(S,b) = \{B\}, \;\; \delta(A,c) = \{S\},$$

$$\delta(A,b) = \{B\}, \;\; \delta(B,a) = \{C\}, \;\; \delta(B,c) = \{A\},$$

en $\delta(\cdots) = \emptyset$ voor alle overige gevallen. Door over te stappen op gegeneraliseerde transitiegrafen en achtereenvolgens A en B weg te werken komen we op een gegeneraliseerde transitiegraaf met twee knopen S en C, en slechts twee pijlen: een pijl van S naar zichzelf gelabeld met $ac + (b+ab)(cb)^*cc$ en een pijl van S naar C gelabeld met $(b+ab)(cb)^*a$. De gevraagde reguliere expressie is nu

$$(ac + (b+ab)(cb)^*cc)^*(b+ab)(cb)^*a.$$

Als in dit proces eerst B gekozen wordt en dan A is het resultaat de equivalente reguliere expressie

$$((a + bc)(bc)^*c)^*(ba + (a + bc)(bc)^*ba).$$

c. Geef een dfa M met $L(M) = \overline{L(G)}$.

Toelichting en uitwerking:

Bovenstaande nfa is in een dfa om te zetten door slechts een trap state D toe te voegen:

$$\delta(S, a) = A, \quad \delta(S, b) = B, \quad \delta(A, c) = S,$$

$$\delta(A, b) = B, \quad \delta(B, a) = C, \quad \delta(B, c) = A,$$

en $\delta(\cdots) = D$ voor de overige negen gevallen. Door nu te definiëren $q_0 = S$ en $F = \{S, A, B, D\}$ is de gevraagde dfa M gegeven.

d. Geef een nfa N met $L(N) = L(G)^R$.

Toelichting en uitwerking:

Deze wordt geconstrueerd door in de nfa van onderdeel b de pijlen om te draaien en begin- en eindtoestand te verwisselen:

$$q_0 = C, \quad F = \{S\},$$

$$\delta(A, a) = \{S\}, \quad \delta(B, b) = \{S, A\}, \quad \delta(S, c) = \{A\},$$
$$\delta(C, a) = \{B\}, \quad \delta(A, c) = \{B\},$$

en $\delta(\cdots) = \emptyset$ voor alle overige gevallen.

Opgave 2.

Gegeven is de taal

$$L = \{a^n b^{n+k} a^k \mid n \geq 0 \wedge k \geq 0\}.$$

a. Geef een non-deterministische pushdown-automaat M met $L(M) = L$.

Toelichting en uitwerking:

We doen dit met vier toestanden q_0, q_1, q_2, q_3 waarvan q_0 de begintoestand is en q_3 de eindtoestand. De eerste a's worden in q_0 gelezen, de b's worden in q_1 gelezen en de a's uit het tweede groepje a's worden in q_2 gelezen. De eis over de aantallen a's en b's wordt verwerkt door

- in q_0 bij elke gelezen a een a op de stapel te zetten,
- in q_1 bij elke gelezen b zo mogelijk een a van de stapel af te halen, en anders een b op de stapel te zetten,
- in q_2 bij elke gelezen a een b van de stapel af te halen, en

- toe te staan om van q_2 naar de eindtoestand q_3 te gaan als de stapel alleen uit het initiële symbool z bestaat.

Hierbij worden in de overgangen van een toestand naar een andere toestand de stapel niet veranderd. Dus:

$$\delta(q_0, a, z) = \{(q_0, az)\}, \ \ \delta(q_0, a, a) = \{(q_0, aa)\},$$

$$\delta(q_0, \lambda, z) = \{(q_1, z)\}, \ \ \delta(q_0, \lambda, a) = \{(q_1, a)\},$$

$$\delta(q_1, b, a) = \{(q_1, \lambda)\}, \ \ \delta(q_1, b, z) = \{(q_1, bz)\}, \ \ \delta(q_1, b, b) = \{(q_1, bb)\},$$

$$\delta(q_1, \lambda, z) = \{(q_2, z)\}, \ \ \delta(q_1, \lambda, b) = \{(q_2, b)\},$$

$$\delta(q_2, a, b) = \{(q_2, \lambda)\}, \ \ \delta(q_2, \lambda, z) = \{(q_3, z)\}.$$

b. Geef een contextvrije grammatica G met $L(G) = L$.

Toelichting en uitwerking:

Een string zit in L precies dan als hij te schrijven is als een string van de vorm $a^n b^n$ gevolgd door een string van de vorm $b^k a^k$. Een contextvrije grammatica die dit beschrijft wordt gegeven door de producties:

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & AB \\ A & \rightarrow & \lambda \mid aAb \\ B & \rightarrow & \lambda \mid bBa \end{array}$$

c. Bewijs dat L niet regulier is.

Toelichting en uitwerking:

Dit doen we met de pompstelling voor reguliere talen. Stel dat L regulier is. Dan is er volgens die pompstelling een getal m zodanig dat elke $w \in L$ met $|w| \geq m$ te schrijven is als $w = xyz$ met $|xy| \leq m$ en $|y| \geq 1$, waarbij voor elk natuurlijk getal i geldt dat $xy^i z \in L$.

Kies nu $w = a^m b^{m+1} a$. Inderdaad geldt $w \in L$. Echter, als $w = xyz$ met $|xy| \leq m$ en $|y| \geq 1$ dan bestaat y geheel uit a's en geldt $xy^2 z = a^k b^{m+1} a$ voor zekere $k > m$, en dus $xy^2 z \notin L$, tegenspraak. Hiermee is bewezen dat L niet regulier is.

Opgave 3.

a. Geef een voorbeeld van een links-lineaire grammatica die ambigu is.

Toelichting en uitwerking:

Een voorbeeld is

$$S \ \rightarrow \ Sab \mid Sa \mid Sb \mid \lambda.$$

Van de string ab zijn nu twee verschillende ontleedbomen te maken: een waarbij eerst de productie $S \rightarrow Sab$ wordt toegepast en vervolgens $S \rightarrow \lambda$, en een andere waarbij achtereenvolgens de producties $S \to Sb$, $S \to Sa$ en $S \to \lambda$ worden toegepast. Uit het bestaan van deze twee verschillende ontleedbomen voor dezelfde string volgt dat de grammatica ambigu is.

b. Bewijs dat de taal bestaande uit alle strings van de vorm ww^R met $w \in \{a,b\}^*$ en waarvan het aantal a's niet deelbaar is door 7, contextvrij is.

Toelichting en uitwerking:

De taal bestaande uit alle strings van de vorm ww^R met $w \in \{a,b\}^*$ is contextvrij want deze wordt beschreven door de grammatica

$$S \;\to\; aSa \mid bSb \mid \lambda.$$

De taal bestaande uit alle strings waarvan het aantal a's niet deelbaar is door 7 is regulier want deze wordt beschreven door de rechts-lineaire grammatica

$$\begin{array}{lcl} S & \to & aS_1 \mid bS \\ S_1 & \to & aS_2 \mid bS_1 \mid \lambda \\ S_2 & \to & aS_3 \mid bS_2 \mid \lambda \\ S_3 & \to & aS_4 \mid bS_3 \mid \lambda \\ S_4 & \to & aS_5 \mid bS_4 \mid \lambda \\ S_5 & \to & aS_6 \mid bS_5 \mid \lambda \\ S_6 & \to & aS \mid bS_6 \mid \lambda. \end{array}$$

Hiervoor kan ook eenvoudig een dfa gegeven worden wat ook het regulier zijn bewijst. De gegeven taal is de doorsnede van deze contextvrije taal en deze reguliere taal, en volgens een stelling is de doorsnede van een contextvrije taal en een reguliere taal altijd contextvrij.

c. Voor een toestand q in een Turing machine geldt $\delta(q,a) = \delta(q,b) = \delta(q,c) = (r,b,L)$. Bepaal de configuratie w waarvoor geldt $abcqabc \vdash w$.

Toelichting en uitwerking:

De Turing machine is in toestand q en leest het symbool a. Vanwege $\delta(q,a) = (r,b,L)$ wordt dit symbool vervangen door b, wordt de machine toestand vervangen door r en wordt vervolgens de kop van de Turing machine naar links verschoven. Het gevraagde resultaat is dan

$$w = abrcbbc.$$