Tentamen Automatentheorie en Formele Talen

(met uitwerkingen)

Vakcode 2IT20/2M130, 17 maart 2003, 9.00 - 12.00 uur

Dit tentamen bestaat uit drie opgaven met in totaal tien onderdelen die elk een punt kunnen opleveren. Daarnaast kan met de inleveropgaven een bonus van maximaal een punt behaald worden, met dien verstande dat het eindcijfer niet boven de tien uitkomt. Wie voor een bonus in aanmerking wil komen dient de naam van de instructieleider te vermelden.

Het tentamen is een gesloten-boek-tentamen, dat wil zeggen dat er tijdens het tentamen geen gebruik mag worden gemaakt van het boek en/of aantekeningen.

Voor alle vragen geldt: motiveer uw antwoord.

Opgave 1.

Gegeven is de nfa $M = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b, c\}, \delta, q_0, \{q_0\})$ met

$$\delta(q_0, a) = \delta(q_2, c) = \{q_1, q_2\}, \quad \delta(q_1, b) = \{q_0, q_2\},$$

en $\delta(\cdots) = \emptyset$ voor alle andere gevallen.

a. Geef een dfa N met $L(N) = L(M)$.

Uitwerking:

Het standaardalgoritme dat nfa's in dfa's omzet komt tot vier toestanden $Q_0 = \{q_0\}, Q_1 = \{q_1, q_2\}, Q_2 = \emptyset, Q_3 = \{q_0, q_2\}$, en

$$\delta(Q_0, a) = Q_1, \quad \delta(Q_1, a) = Q_2, \quad \delta(Q_2, a) = Q_2, \quad \delta(Q_3, a) = Q_1,$$

$$\delta(Q_0, b) = Q_2, \quad \delta(Q_1, b) = Q_3, \quad \delta(Q_2, b) = Q_2, \quad \delta(Q_3, b) = Q_2,$$

$$\delta(Q_0, c) = Q_2, \quad \delta(Q_1, c) = Q_1, \quad \delta(Q_2, c) = Q_2, \quad \delta(Q_3, c) = Q_1.$$

Hierin is Q_0 de begintoestand en zijn Q_0 en Q_3 de eindtoestanden.

Opmerking: Voor het geven van zo'n nfa of dfa is het niet nodig alle δ-waarden expliciet op te schrijven; het is afdoende om een transitiegraaf te tekenen waarin alle pijlen gelabeld zijn en waarin duidelijk de begintoestand en de eindtoestanden aangegeven zijn.

b. Geef een reguliere expressie r met $L(r) = L(M)$.

Uitwerking:

Om het standaardalgoritme dat nfa's in reguliere expressies omzet te kunnen toepassen kan eerst de begintoestand en eindtoestand uit elkaar worden gehaald door het toevoegen van een nieuwe eindtoestand en een λ-stap daar naar toe. Dit is echter niet nodig: ook in de gegeven nfa kan men aan de slag met het wegwerken van toestanden die geen begin- en geen eindtoestand zijn. Als eerst q_1 en dan q_2 wordt weggewerkt blijft alleen q_0 over met een pijl naar zichzelf die gelabeld is met $ab + (a + ab)(c + cb)^*cb$. De gevraagde reguliere expressie is dus

$$r = (ab + (a + ab)(c + cb)^*cb)^*.$$

Als eerst q_2 en dan q_1 wordt weggewerkt wordt het resultaat

$$r = ((a + ac^*c)(bc^*c)^*b)^*$$

hetgeen nog vereenvoudigd kan worden naar

$$r = (ac^*(bc^*c)^*b)^*;$$

al deze antwoorden zijn dus goed.

c. Geef een rechts-lineaire grammatica G met $L(G) = \overline{L(M)}$.

Uitwerking:

Door in de dfa die we in deel a hebben geconstrueerd als eindtoestanden Q_1 en Q_2 te kiezen, hebben we een dfa voor $\overline{L(M)}$. Deze is direct naar een rechts-lineaire grammatica om te zetten, waarin we Q_0 herbenoemen tot S:

$$\begin{array}{rcl} S & \to & aQ_1 \mid bQ_2 \mid cQ_2 \\ Q_1 & \to & aQ_2 \mid bQ_3 \mid cQ_1 \mid \lambda \\ Q_2 & \to & aQ_2 \mid bQ_2 \mid cQ_2 \mid \lambda \\ Q_3 & \to & aQ_1 \mid bQ_2 \mid cQ_1 \end{array}$$

d. Geef een links-lineaire grammatica H met $L(H) = L(M)$.

Uitwerking:

Dit kunnen we op basis van de gegeven nfa doen. Als we hier alle pijlen omdraaien hebben we een nfa voor $L(M)^R$; begin- en eindtoestand hoeven hier niet verwisseld te worden want die kwamen toch al overeen. Als we hierin q_0, q_1, q_2 herbenoemen tot S, A, B komen we tot de rechts-lineaire grammatica voor $L(M)^R$:

$$\begin{array}{rcl} S & \to & bA \mid \lambda \\ A & \to & aS \mid cB \\ B & \to & aS \mid bA \mid cB. \end{array}$$

Door alle rechterkanten van producties om te keren maken we hieruit de links-lineaire grammatica H met $L(H) = L(M)$:

$$\begin{array}{rcl} S & \to & Ab \mid \lambda \\ A & \to & Sa \mid Bc \\ B & \to & Sa \mid Ab \mid Bc. \end{array}$$

Opgave 2.

Gegeven is de taal $L = \{uu^Rv^Rv \mid u, v \in \{a,b\}^*\}$.

a. Geef een non-deterministische pushdown-automaat M met $L(M) = L$.

Uitwerking:

Merk op dat $L = L' \cdot L'$ met $L' = \{ww^R \mid w \in \{a,b\}^*\}$. Dit is een standaardvoorbeeld van een contextvrije taal; een push-downautomaat hiervoor staat uitgewerkt in Example 7.4 op pagina 180 en 181 van het boek. Een pushdownautomaat voor L is nu te maken door twee copieën hiervan aan elkaar te knopen zoals aangegeven in figuur 3.4 op pagina 80 van het boek. Aangezien de stapel van de automaat voor L' altijd precies alleen uit z bestaat bij het bereiken van de eindtoestand voldoet het resultaat aan de gewenste eigenschap.

b. Geef een contextvrije grammatica G met $L(G) = L$.

Uitwerking:

$$\begin{array}{lcl} S & \to & AA \\ A & \to & aAa \mid bAb \mid \lambda. \end{array}$$

c. Bewijs dat L niet regulier is.

Uitwerking:

Dit doen we met de pompstelling voor reguliere talen. Stel dat L regulier is. Dan is er volgens die pompstelling een getal m zodanig dat elke $w \in L$ met $|w| \geq m$ te schrijven is als $w = xyz$ met $|xy| \leq m$ en $|y| \geq 1$, waarbij voor elk natuurlijk getal i geldt dat $xy^iz \in L$.

Kies nu $w = a^m bba^m baab$. Inderdaad geldt $w \in L$ want $w = uu^Rv^Rv$ met $u = a^m b$ en $v = ab$. Volgens de pompstelling is nu $w = xyz$ met $|xy| \leq m$ en $|y| \geq 1$ en geldt $xz \in L$. Vanwege $|xy| \leq m$ bestaat y geheel uit a's en geldt $xz = a^k bba^m baab$ voor zekere $k < m$. Stel dat inderdaad $xz \in L$, dan zijn er u, v met $a^k bba^m baab = uu^Rv^Rv$. We onderscheiden de volgende gevallen:

- $|v| = 0$, dan is $a^k bba^m baab = uu^R$, tegenspraak;
- $|v| = 1$, dan is $v = b$ en $v^R = a$, tegenspraak;
- $|v| = 2$, dan is $a^k bba^m = uu^R$, tegenspraak;
- $|v| = 3$, dan is $v = aab$ en $v^R = aab$, tegenspraak;
- $|v| > 3$, dan komt het patroon *baab* twee keer voor in v^Rv, maar niet twee keer in $a^k bba^m baab = uu^Rv^Rv$, tegenspraak.

Alle gevallen leveren dus een tegenspraak. Hiermee is bewezen dat L niet regulier is.

Opmerking: De keuze van w is hier vrij subtiel. Zo is de keuze $w = a^m bba^m bb$ niet afdoende, want dan kan $xz = a^k bba^m bb$ voor zekere $k < m$ wel van de vorm uu^Rv^Rv zijn, bijvoorbeeld als k en m beide even zijn en $k = 2k'$ en $m = 2m'$ dan is $a^k bba^m bb = uu^Rv^Rv$ voor $u = a^{k'}$ en $v = a^{m'}bb$.

Er zijn wel heel andere keuzes mogelijk. Als bijvoorbeeld gekozen wordt $w = ba^m bba^m bbabbab$ dan kan niet geconcludeerd worden dat y alleen uit a's bestaat. Het geval waarin dat niet zo is is echter snel af te handelen door te zien dat het totaal aantal b's in xz dan slechts 7 is, en als y alleen uit a's bestaat is er veel minder gevalsonderscheid nodig dan in de boven gegeven redenering.

Opgave 3.

a. Is de grammatica bestaande uit de drie producties $S \to a$, $S \to b$, $S \to aSSb$ ambigu? Bewijs uw antwoord.

Uitwerking:

Ja, deze is ambigu, want de string $aaabbbb$ heeft twee verschillende ontleedbomen:

```
     S                S
   / | \            / | \
  a / \ b          a / \ b
   S   S            S   S
 / | \  \          /  / | \
a / \ b  b        a  a / \ b
 S   S                S   S
 |   |                |   |
 a   b                b   b
```

b. Gegeven is een contextvrije grammatica G. Bewijs dat er een non-deterministische pushdown-automaat M bestaat met $L(M) = \{\ w \in L(G) \mid |w| > 5\ \}$; hierbij mag gebruik worden gemaakt van stellingen die in het boek staan.

Uitwerking:

De taal $L' = \{\ w \mid |w| > 5\ \}$ is regulier want er geldt

$$L' = L((a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)^*)$$

als het alfabet bestaat uit a en b, en analoog voor elk ander eindig alfabet. De gegeven taal $L = \{w \in L(G) \mid |w| > 5\ \}$ is dus de doorsnede van de contextvrije taal $L(G)$ en de reguliere taal L'; volgens een stelling uit het boek is een dergelijke taal contextvrij. Verder is er (volgens een andere stelling) voor elke contextvrije taal L een non-deterministische pushdown-automaat M met $L(M) = L$. Hiermee is het gevraagde bewezen.

c. Voor een toestand q in een Turing machine geldt $\delta(q,a) = \delta(q,b) = \delta(q,\Box) = (r,b,R)$. Bepaal de configuratie w waarvoor geldt $abaqaba \vdash w$.

Uitwerking:

De Turing machine is in toestand q en leest het symbool a. Vanwege $\delta(q,a) = (r,b,R)$ wordt dit symbool vervangen door b, wordt de machine toestand vervangen door r en wordt vervolgens de kop van de Turing machine naar rechts verschoven. Het gevraagde resultaat is dan

$$w = ababrba.$$