Tentamen Automatentheorie en Formele Talen

Vakcode 2IT20, 19 maart 2004, 9.00 - 12.00 uur

(met uitwerkingen)

Dit tentamen bestaat uit drie opgaven met in totaal tien onderdelen die elk een punt kunnen opleveren. Daarnaast kan met de inleveropgaven een bonus van maximaal een punt behaald worden, met dien verstande dat het eindcijfer niet boven de tien uitkomt. Wie voor een bonus in aanmerking wil komen dient de naam van de instructieleider te vermelden.

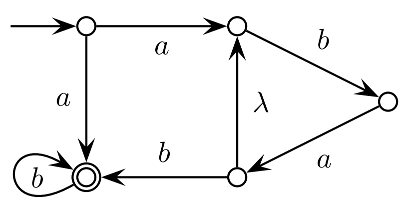
VKO-studenten worden verzocht "VKO" te vermelden bovenaan het eerste blad.

Het tentamen is een gesloten-boek-tentamen, dat wil zeggen dat er tijdens het tentamen geen gebruik mag worden gemaakt van het boek en/of aantekeningen.

Voor alle vragen geldt: motiveer uw antwoord.

Opgave 1.

Gegeven is de nfa M met de volgende transitiegraaf:



a. Geef een dfa N met $L(N) = L(M)$.

Uitwerking:

Noem de vijf toestanden vanaf de starttoestand tot en met de eindtoestand met de klok mee q_0 tot en met q_4.

Het standaardalgoritme om een dfa te maken levert nu zes toestanden $\{q_0\}$, $\{q_1, q_4\}$, $\{q_2, q_4\}$, $\{q_1, q_3\}$, $\{q_4\}$ en $\emptyset$, en

$$\delta(\{q_0\}, a) = \{q_1, q_4\}, \quad \delta(\{q_0\}, b) = \emptyset,$$

$$\delta(\{q_1, q_4\}, a) = \emptyset, \quad \delta(\{q_1, q_4\}, b) = \{q_2, q_4\},$$
$$\delta(\{q_2, q_4\}, a) = \{q_1, q_3\}, \quad \delta(\{q_2, q_4\}, b) = \{q_4\},$$
$$\delta(\{q_1, q_3\}, a) = \emptyset, \quad \delta(\{q_1, q_3\}, b) = \{q_2, q_4\},$$
$$\delta(\{q_4\}, a) = \emptyset, \quad \delta(\{q_4\}, b) = \{q_4\},$$
$$\delta(\emptyset, a) = \delta(\emptyset, b) = \emptyset.$$

De starttoestand hierbij is $\{q_0\}$ en de verzameling eindtoestanden is $\{\ \{q_1, q_4\}, \{q_2, q_4\}, \{q_4\}\ \}$.

b. Geef een reguliere expressie r met $L(r) = L(M)$.

Uitwerking:

Achtereenvolgens wegwerken van de toestanden q_2, q_1, q_3 levert een gegeneraliseerde transitiegraaf met startknoop q_0 en eindknoop q_4, met twee transities: een van q_0 naar q_4 met label $a + aba(ba)^*b$, en een van q_4 naar q_4 met label b. De gevraagde reguliere expressie r is dus

$$r = (a + aba(ba)^*b)b^*.$$

c. Geef een links-lineaire grammatica G met $L(G) = L(M)$.

Uitwerking:

Door in de gegeven nfa alle pijlen om te keren en q_4 als start toestand te definiëren en $\{q_0\}$ als verzameling eindtoestanden is een nfa verkregen voor $L(M)^R$. Door hierin de toestanden q_0, q_1, q_2, q_3 en q_4 respectievelijk aan te geven met de variabelen A, B, C, D en S is deze nfa voor $L(M)^R$ te beschrijven met de volgende rechts-lineaire grammatica:

$$\begin{array}{lcl} S & \to & bS \mid bD \mid aA \\ A & \to & \lambda \\ B & \to & D \mid aA \\ C & \to & bB \\ D & \to & aC. \end{array}$$

De gevraagde links-lineaire grammatica wordt verkregen door hierin alle rechterkanten van de producties om te keren:

$$\begin{array}{lcl} S & \to & Sb \mid Db \mid Aa \\ A & \to & \lambda \\ B & \to & D \mid Aa \\ C & \to & Bb \\ D & \to & Ca. \end{array}$$

Opgave 2.

Gegeven is de taal $L = \{a^n b^k \mid n, k \geq 0 \wedge n \neq k\}$.

a. Geef een non-deterministische pushdown-automaat M met $L(M) = L$.

Uitwerking:

$$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \Sigma = \{a, b\}, \Gamma = \{1, z\}, F = \{q_2, q_3\},$$

$$\begin{aligned} \delta(q_0, a, z) &= \{(q_0, 1z)\}, \\ \delta(q_0, a, 1) &= \{(q_0, 11)\}, \\ \delta(q_0, \lambda, z) &= \{(q_1, z)\}, \\ \delta(q_0, \lambda, 1) &= \{(q_1, 1)\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta(q_1, \lambda, 1) &= \{(q_2, 1)\},\\
\delta(q_1, b, 1) &= \{(q_1, \lambda)\},\\
\delta(q_1, b, z) &= \{(q_3, z)\},\\
\delta(q_3, b, z) &= \{(q_3, z)\},
\end{aligned}$$

en $\delta(\cdots) = \emptyset$ in alle andere gevallen.

b. Geef een contextvrije grammatica G met $L(G) = L$.

Uitwerking:

$$\begin{aligned}
S &\to A \mid B,\\
A &\to a \mid aAb \mid aA,\\
B &\to b \mid aBb \mid Bb.
\end{aligned}$$

c. Bewijs dat L niet regulier is.

Uitwerking:

Stel dat L regulier is. Omdat de klasse van reguliere talen gesloten is onder complement en doorsnede, en $L(a^*b^*)$ regulier is, is dan ook

$$\overline{L} \cap L(a^*b^*) \;=\; \{a^nb^n \mid n \geq 0\}$$

regulier, en hiervan is bekend dat dat niet zo is. Tegenspraak, dus L is niet regulier.

d. Bewijs dat $\{\ w \in L \mid |w| \text{ is niet deelbaar door } 5\ \}$ contextvrij is.

Uitwerking:

Volgens onderdeel a (of b) weten we dat L contextvrij is. Verder is $((a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b))^*$ een reguliere expressie, dus is $L(((a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b))^*)$ een reguliere taal. Omdat de klasse van reguliere talen gesloten is onder complement is ook $\overline{L(((a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b))^*)}$ een reguliere taal. De gegeven taal is de doorsnede van de contextvrije taal L en deze regulier taal, en is dus contextvrij.

Opgave 3.

a. Is de grammatica bestaande uit de drie producties $S \to b$, $S \to aS$ en $S \to aSS$ ambigu? Bewijs uw antwoord.

Uitwerking:

Deze grammatica is ambigu, want de string $aabb$ heeft twee verschillende ontleedbomen:

```
   S                S
 / | \            / |
a  S  S          a  S
  / \  \           /|\
 a   S  b         a S S
     |              |  \
     b              b   b
```

b. Ga na of $\{ \ a^n b^k a^n \mid k, n > 0 \ \}$ regulier is; bewijs uw antwoord.

Uitwerking:

Deze taal is niet regulier. Dit bewijzen we met de pompstelling voor reguliere talen. Stel dat L regulier is. Dan is er volgens die pompstelling een getal m zodanig dat elke $w \in L$ met $|w| \geq m$ te schrijven is als $w = xyz$ met $|xy| \leq m$ en $|y| \geq 1$, waarbij voor elk natuurlijk getal i geldt dat $xy^iz \in L$.

Kies nu $w = a^m b a^m$. Inderdaad geldt $w \in L$. Volgens de pompstelling is nu $w = xyz$ met $|xy| \leq m$ en $|y| \geq 1$ en geldt $xz \in L$. Vanwege $|xy| \leq m$ bestaat y geheel uit a's en geldt $xz = a^k b a^m$ voor zekere $k < m$. Omdat $k \neq m$ geldt nu $xz = a^k b a^m \notin L$, tegenspraak.

Hiermee is bewezen dat L niet regulier is.

c. Geef een Turing machine die precies de taal $\{aa, ab, b\}$ accepteert.

Uitwerking:

De gegeven taal is regulier. Een dfa hiervoor is dus al in essentie de gevraagde Turing machine, waarbij alleen naar rechts wordt gelopen en nooit een symbool op de band door iets anders overschreven hoeft te worden. De dfa zonder trap state, omgezet in Turing machine notatie levert

$$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}, \Sigma = \{a, b\}, \Gamma = \{a, b, \Box\}, F = \{q_5\},$$

$$\begin{aligned}
\delta(q_0, a) &= \{(q_1, a, R)\}, \\
\delta(q_0, b) &= \{(q_2, b, R)\}, \\
\delta(q_1, a) &= \{(q_3, a, R)\}, \\
\delta(q_1, b) &= \{(q_4, b, R)\}, \\
\delta(q_2, \Box) = \delta(q_3, \Box) = \delta(q_4, \Box) &= \{(q_5, \Box, R)\}.
\end{aligned}$$