Technische Universiteit Eindhoven
Faculteit Wiskunde en Informatica

Set 2 Inleveropgaven Kansrekening (2WS20) 2014-2015

1. **(Functies van normale verdelingen)**
   Stel dat X een standaard normale verdeling heeft.

   (a) *(10 punten)* Bereken $\mathbb{E}[|X|]$ en $\mathrm{Var}(|X|)$.

   (b) *(10 punten)* Wat is de dichtheid van $|X|$? En wat is de dichtheid van X^2?

   (c) *(10 punten)* Laat zien dat $|X|$ en X ongecorreleerd zijn. Zijn ze onafhankelijk?

2. **(Gezamenlijke verdeling)**
   De (discrete) random variabelen (X, Y) hebben een gezamenlijke kansmassafunctie van de vorm

$$f_{X,Y}(k,l) = c\binom{n}{k}(\tfrac{1}{2})^{n+k}\frac{2^l}{(k-l)!}$$

   voor een zekere $c > 0$. Hier is $l \in \mathbb{Z}$ en $k \in \{0, \ldots, n\}$ met $l \leq k$. De gezamenlijke kansmassafunctie is nul anders.

   (a) *(10 punten)* Wat is c? [Als je c niet kunt berekenen, laat dan gewoon c staan in het vervolg.]

   (b) *(10 punten)* Bereken $\mathbb{E}[X]$ en $\mathbb{E}[Y]$.

   (c) *(10 punten)* Bereken $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

   (d) *(10 punten)* Bestaan er $a, b \in \mathbb{R}$ zodanig dat X en $aX + bY$ onafhankelijk zijn?

   (e) *(10 punten)* Stel $n = 100$. Bereken $\mathbb{E}[Y \mid X = 50]$.

3. (a) *(10 punten)* Bereken de kansmassafunctie van $X + Y$ als X en Y twee onafhankelijke Poisson verdelingen zijn met parameters μ en λ.

   (b) *(10 punten)* Stel dat U uniform verdeeld is, en, gegeven dat $U = u$, heeft X een binomiale verdeling met parameters 4 en succeskans u. Wat is $\mathbb{P}(X = k)$ voor $k = 0, 1, 2, 3, 4$?

Antwoorden en puntentelling

Het maximaal aantal te behalen punten is 100, verdeeld zoals aangegeven. De antwoorden moeten helder uitgelegd zijn, met het noemen van de gebruikte resultaten. Bij de antwoorden is duidelijk aangegeven voor welk deelresultaat je hoeveel punten krijgt.

1. **(Functies van normale verdelingen)**
   Stel dat X een standaard normale verdeling heeft.

   (a) *(10 punten)* Bereken $\mathbb{E}[|X|]$ en $\mathrm{Var}(|X|)$.

   Antwoord: We gebruiken de wet van de beusteloze statisticus en rekenen uit dat **(5pt)**

   $$\mathbb{E}[|X|] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |z| \mathrm{e}^{-z^2/2} dz = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} z \mathrm{e}^{-z^2/2} dz = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

   Voor $\mathrm{Var}(|X|)$ krijgen we dan

   $$\mathrm{Var}(|X|) = \mathbb{E}[|X|^2] - \mathbb{E}[|X|]^2 = \mathbb{E}[X^2] - \frac{2}{\pi} = \mathrm{Var}(X) - \frac{2}{\pi} = 1 - \frac{2}{\pi},$$

   waar we gebruiken dat $\mathrm{Var}(X) = 1$ voor een standaard normale r.v. **(5pt)**

   (b) *(10 punten)* Wat is de dichtheid van $|X|$? En wat is de dichtheid van X^2?

   Antwoord: We bereken, voor $x \geq 0$,

   $$F_{|X|}(x) = \mathbb{P}(|X| \leq x) = 2\mathbb{P}(0 < X < x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \mathrm{e}^{-z^2/2} dz.$$

   Hieruit volgt dat $f_{|X|}(x) = F'_{|X|}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \mathrm{e}^{-x^2/2}$ voor $x \geq 0$ en 0 anders. **(5pt)**
   We bereken, voor $x \geq 0$,

   $$F_{X^2}(x) = \mathbb{P}(X^2 \leq x) = \mathbb{P}(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}) = 2\mathbb{P}(0 < X < \sqrt{x}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{-z^2/2} dz.$$

   Hieruit volgt door de kettingregel dat $f_{X^2}(x) = F'_{X^2}(x) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \mathrm{e}^{-x/2} / \sqrt{x}$ voor $x \geq 0$ en 0 anders. [Let dus op de macht van x en de factor 2 die nu in de noemer staat.] Dus, X^2 heeft een Gamma verdeling met $t = 1/2$ en $\lambda = 1$. [Dit laatste hoeft niet vermeld te worden.] **(5pt)**

   (c) *(10 punten)* Laat zien dat $|X|$ en X ongecorreleerd zijn. Zijn ze onafhankelijk?

   Antwoord: We weten dat $\mathbb{E}[X] = 0$, dus is ook $\mathrm{Cov}(X, |X|) = \mathbb{E}[X \cdot |X|]$, zodat

   $$\mathrm{Cov}(X, |X|) = \mathbb{E}[X \cdot |X|] = \int_{-\infty}^{0} (-z^2) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-z^2/2} dz + \int_0^{\infty} z^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-z^2/2} dz = 0.$$

   X en $|X|$ zijn dus ongecorreleerd. **(5pt)**
   X en $|X|$ zijn niet onafhankelijk, omdat $\mathbb{P}(X \leq 2, |X| \leq 1) = \mathbb{P}(|X| \leq 1) \neq \mathbb{P}(X \leq 2)\mathbb{P}(|X| \leq 1)$, omdat $\mathbb{P}(X \leq 2) < 1$. **(5pt)** Geef ook alle punten als een voorbeeld wordt gevonden waarvoor bewezen wordt dat

   $$\mathbb{E}[g(X)h(|X|) \neq \mathbb{E}[g(X)]\mathbb{E}[h(|X|)].$$

   [Geef **(3pt)** punten als geen tegenvoorbeeld gegeven wordt, maar wel een correct verhaal wordt gepresenteerd.]

2. **(Gezamenlijke verdeling)**
De (discrete) random variabelen (X, Y) hebben een gezamenlijke kansmassafunctie van de vorm

$$f_{X,Y}(k,l) = c\binom{n}{k}(\tfrac{1}{2})^{n+k}\frac{2^l}{(k-l)!}$$

voor een zekere $c > 0$. Hier is $l \in \mathbb{Z}$ en $k \in \{0, \ldots, n\}$ met $l \leq k$. De gezamenlijke kansmassafunctie is nul anders.

(a) *(10 punten)* Wat is c? [Als je c niet kunt berekenen, laat dan gewoon c staan in het vervolg.]

Antwoord: Merk op dat **(2pt)**

$$1/c = \sum_{k=0}^{n}\sum_{l\leq k}\binom{n}{k}(\tfrac{1}{2})^{n+k}\frac{2^l}{(k-l)!}.$$

We berekenen **(8pt)**

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{l\leq k}\binom{n}{k}(\tfrac{1}{2})^{n}\frac{(\frac{1}{2})^{k-l}}{(k-l)!} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\tfrac{1}{2})^{n}\sum_{m\geq 0}\frac{(\frac{1}{2})^{m}}{m!} = 1\cdot\sqrt{\mathrm{e}} = \sqrt{\mathrm{e}}.$$

Dus is $c = \mathrm{e}^{-1/2}$.

(b) *(10 punten)* Bereken $\mathbb{E}[X]$ en $\mathbb{E}[Y]$.

Antwoord: Voor $\mathbb{E}[X]$ berekenen we

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \mathrm{e}^{-1/2}\sum_{k=0}^{n}\sum_{l\leq k}k\binom{n}{k}(\tfrac{1}{2})^{n+k}\frac{2^l}{(k-l)!} = \mathrm{e}^{-1/2}\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}(\tfrac{1}{2})^{n}\sum_{l\leq k}\frac{(\frac{1}{2})^{k-l}}{(k-l)!}\\ &= \sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}(\tfrac{1}{2})^{n}\mathrm{e}^{-1/2}\sum_{m\geq 0}\frac{(\frac{1}{2})^{m}}{m!} = \sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}(\tfrac{1}{2})^{n}.\end{aligned}$$

Dus, $\mathbb{E}[X] = n/2$, omdat we de verwachting herkennen van een binomiale verdeling met parameters n en $p = 1/2$. **(5pt)**
Voor $\mathbb{E}[Y]$ berekenen we

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y] &= \mathrm{e}^{-1/2}\sum_{k=0}^{n}\sum_{l\leq k}l\binom{n}{k}(\tfrac{1}{2})^{n+k}\frac{2^l}{(k-l)!} = \mathrm{e}^{-1/2}\sum_{k=0}^{n}\sum_{l\leq k}[k-(k-l)]\binom{n}{k}(\tfrac{1}{2})^{n}\frac{(\frac{1}{2})^{k-l}}{(k-l)!}\\ &= n/2 - \mathrm{e}^{-1/2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\tfrac{1}{2})^{n}\frac{1}{2}\sum_{l\leq k-1}\frac{(\frac{1}{2})^{k-l-1}}{(k-l-1)!} = n/2 - 1/2.\end{aligned}$$

Dus, $\mathbb{E}[Y] = (n-1)/2$. **(5pt)**

(c) *(10 punten)* Bereken $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

Antwoord: We berekenen

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[XY] &= \mathrm{e}^{-1/2}\sum_{k=0}^{n}\sum_{l\leq k}kl\binom{n}{k}(\tfrac{1}{2})^{n+k}\frac{2^l}{(k-l)!} = \mathrm{e}^{-1/2}\sum_{k=0}^{n}\sum_{l\leq k}k(k-(k-l))\binom{n}{k}(\tfrac{1}{2})^{n}\frac{(\frac{1}{2})^{k-l}}{(k-l)!}\\ &= \sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}(\tfrac{1}{2})^{n}\mathrm{e}^{-1/2}\sum_{m\geq 0}(k-m)\frac{(\frac{1}{2})^{m}}{m!} = \sum_{k=0}^{n}k(k-1/2)\binom{n}{k}(\tfrac{1}{2})^{n} = \mathbb{E}[Z(Z-1/2)],\end{aligned}$$

waarbij $Z \sim \mathsf{Bin}(n, 1/2)$ **(5pt)**. Omdat voor $Z \sim \mathsf{Bin}(n, p)$ geldt dat $\mathbb{E}[Z] = np, \mathbb{E}[Z^2] = n(n-1)p^2 + np$ **(2pt)**, krijgen we dat

$$\mathbb{E}[XY] = n(n-1)/4 + n/2 - n/4 = n^2/4,$$

zodat **(3pt)**

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = n^2/4 - (n/2)(n-1)/2 = n/4.$$

[Geef ook alle punten als alle berekeningen direct en correct uitgevoerd zijn zonder de binomiale verdeling te gebruiken.]

(d) *(10 punten)* Bestaan er $a, b \in \mathbb{R}$ zodanig dat X en $aX + bY$ onafhankelijk zijn?

Antwoord: Het is voldoende om alleen $a = 1$ te onderzoeken, omdat als (a, b) een oplossing is, dat is $(1, b/a)$ dat ook. We nemen dus aan dat $a = 1$. Verder, als $n = 0$, dan is $X = 0$ met kans 1, en een constante random variabele is onafhankelijk van alles, in het bijzonder van $X + bY$ **(2pt)**. We nemen dus vanaf nu aan dat $a = 1$ en $n \geq 1$.
We rekenen uit dat

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = k, X + bY = l) &= \mathbb{P}(X = k, Y = (l-k)/b) \\ &= \mathrm{e}^{-1/2}\binom{n}{k}(\tfrac{1}{2})^{n+k}\frac{2^{(l-k)/b}}{(k-(l-k)/b)!} = \mathrm{e}^{-1/2}\binom{n}{k}(\tfrac{1}{2})^{n}\frac{(\frac{1}{2})^{k+(k-l)/b}}{(k+k/b-l/b)!}.\end{aligned}$$

Dit moet een product zijn van functies van k en l **(2pt)**, en dat is waar precies als $(k+k/b-l/b)!$ een product is van functies van k en l, wat alleen waar is als $b = -1$ **(4pt)**. Als $b = -1$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = k, X - Y = l) &= \mathbb{P}(X = k, Y = k - l) \\ &= \mathrm{e}^{-1/2}\binom{n}{k}(\tfrac{1}{2})^{n}\frac{(\frac{1}{2})^{l}}{l!}.\end{aligned}$$

Dus geldt dat X en $X - Y$ onafhankelijk **(4pt)**. Inspectie geeft ook dat $X \sim \mathsf{Bin}(n, 1/2)$ en $X - Y \sim \mathsf{Poi}(1/2)$ (maar dat was niet gevraagd).

(e) *(10 punten)* Stel $n = 100$. Bereken $\mathbb{E}[Y \mid X = 50]$.

Antwoord: Uit de vorige vraag volgt dat $X - Y$ onafhankelijk is van X, en dus schrijven we **(10pt)**

$$\mathbb{E}[Y \mid X = 50] = \mathbb{E}[X - (Y - X) \mid X = 50] = 50 - \mathbb{E}[Y - X] = 50 - 1/2 = 49\tfrac{1}{2}.$$

[Rechtstreeks uitrekenen kan ook, is lastiger, maar geeft ook alle punten.]

3. (a) *(10 punten)* Als X en Y twee onafhankelijke Poisson verdelingen zijn met parameters μ en λ, bereken dan de kansmassafunctie van $X + Y$.

Antwoord: We hebben dat, voor $k = 0, 1, 2, \ldots,$

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathrm{e}^{-\mu}\frac{\mu^k}{k!}, \qquad \mathbb{P}(Y = k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Dus geldt dat **(5pt)**

$$\mathbb{P}(X + Y = k) = \sum_l \mathbb{P}(X = l)\mathbb{P}(Y = k - l) = \sum_{l=0}^{k} \mathrm{e}^{-\mu}\frac{\mu^l}{l!}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-l}}{(k-l)!}.$$

We rekenen dan verder uit dat

$$\mathbb{P}(X + Y = k) = \mathrm{e}^{-(\mu+\lambda)}\frac{1}{k!}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}\mu^l\lambda^{k-l} = \mathrm{e}^{-(\mu+\lambda)}\frac{(\mu+\lambda)^k}{k!},$$

waar we in de laatste stap het Binomium van Newton gebruiken **(5pt)**.

(b) *(10 punten)* Stel dat U uniform verdeeld is, en, gegeven dat $U = u$, heeft X een binomiale verdeling met parameters 4 en succeskans u. Wat is $\mathbb{P}(X = k)$ voor $k = 0, 1, 2, 3, 4$?

Antwoord: We weten dat **(2pt)**

$$\mathbb{P}(X = k \mid U = u) = \binom{4}{k} u^k (1-u)^{4-k},$$

dus ook

$$\mathbb{P}(X = k \mid U) = \binom{4}{k} U^k (1-U)^{4-k}.$$

Omdat $\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y \mid X]] = \mathbb{E}[Y]$ is dus **(2pt)**

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{E}[I_{\{X=k\}}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[I_{\{X=k\}} \mid U]] = \mathbb{E}[\mathbb{P}(X = k \mid U)] = \int_0^1 \binom{4}{k} u^k (1-u)^{4-k} du.$$

Merk op dat $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X = 4-k)$ voor alle $k = 0, 1, 2, 3, 4$. We hoeven deze integraal dus alleen uit te rekenen voor $k = 0, 1, 2$. **(2pt)**
Voor $k = 0$ krijgen we

$$\mathbb{P}(X = 0) = \int_0^1 (1-u)^4 du = 1/5.$$

Voor $k = 1$,

$$\mathbb{P}(X = 1) = 4 \int_0^1 u(1-u)^3 du = 4 \int_0^1 [(1-u)^3 - (1-u)^4] du = 4[\frac{1}{4} - \frac{1}{5}] = 1/5.$$

Voor $k = 2$,

$$\mathbb{P}(X = 2) = 6 \int_0^1 u^2 (1-u)^2 du = 6 \int_0^1 [u^2 - 2u^3 + u^4] du = 6[\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5}] = 1/5.$$

[Voor alle samen **(4pt)**. Geef ook **(4pt)** als de waarden voor alle k uitgerekend worden. Tot slot, als wordt gebruikt dat

$$\int_0^1 u^k (1-u)^{n-k} du = \binom{n+1}{k+1}^{-1},$$

geef dan ook **(4pt)**.]