TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Uitwerkingen van het tentamen
Kansrekening en Statistiek (2S270),
vrijdag 5 juli 2002, 9.00 - 12.00 uur.

(1a) Zij P_k de gevraagde kans. Dan is $P_k = 0$ voor $k = b+2, \ldots, b+r$, terwijl voor $k = 1, \ldots, b+1$ geldt

$$P_k = \frac{\binom{b+r-k}{r-1}}{\binom{b+r}{b}}.$$

Immers, stel het kansexperiment voor als het neerleggen van de $b+r$ knikkers van links naar rechts in een toevallige volgorde. De noemer is het aantal manieren waarop de b blauwe knikkers kunnen worden geplaatst op de $b+r$ beschikbare posities. De teller is het aantal manieren waarop de $r-1$ rode knikkers, die over zijn na de trekking van de eerste rode knikker bij de k-de trekking, kunnen worden geplaatst op de $b+r-k$ posities die dan nog resteren.

(1b) Deze kans is gelijk aan $r/(b+r)$. Immers, alle trekkingen hebben dezelfde kans en derhalve is de gevraagde kans gelijk aan de kans dat de eerste trekking een rode knikker oplevert.

(2a) Geldt $f_{T_i}(x) = p_i(1-p_i)^{x-1}$ voor $x = 1, 2, \ldots$ en nul elders.

(2b) Bereken

$$\begin{aligned} P(T_1 = T_2) &= \sum_{x=1}^{\infty} P(T_1 = T_2 = x) = \sum_{x=1}^{\infty} f_{T_1}(x) f_{T_2}(x) \\ &= \sum_{x=1}^{\infty} p_1(1-p_1)^{x-1} p_2(1-p_2)^{x-1} \\ &= \tfrac{p_1 p_2}{1-(1-p_1)(1-p_2)}. \end{aligned}$$

(2c) Bereken

$$\begin{aligned}
P(T_1 < T_2) &= \sum_{x=1}^{\infty} \sum_{y=x+1}^{\infty} P(T_1 = x, T_2 = y) \\
&= \sum_{x=1}^{\infty} \sum_{y=x+1}^{\infty} f_{T_1}(x) f_{T_2}(y) \\
&= \sum_{x=1}^{\infty} \sum_{y=x+1}^{\infty} p_1(1-p_1)^{x-1} p_2(1-p_2)^{y-1} \\
&= p_1 p_2 (1-p_2) \sum_{x=1}^{\infty} [(1-p_1)(1-p_2)]^{x-1} \sum_{y=x+1}^{\infty} (1-p_2)^{y-x-1} \\
&= p_1 p_2 (1-p_2) \tfrac{1}{1-(1-p_1)(1-p_2)} \tfrac{1}{1-(1-p_2)} \\
&= \tfrac{p_1(1-p_2)}{1-(1-p_1)(1-p_2)}.
\end{aligned}$$

(3a) Voor $x = 1, 2 \ldots$ geldt

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{y=1}^{\infty} f(x,y) \\
&= \sum_{y=1}^{\infty} \tfrac{C}{(x+y-1)(x+y)(x+y+1)} \tfrac{1}{2}[(x+y+1) - (x+y-1)] \\
&= \tfrac{C}{2} \sum_{y=1}^{\infty} \left[\tfrac{1}{(x+y-1)(x+y)} - \tfrac{1}{(x+y)(x+y+1)} \right] = \tfrac{C}{2} \tfrac{1}{x(x+1)}.
\end{aligned}$$

De laatste som is telescoperend. Verder $f(x) = 0$ elders.

(3b) Voor $z = 2, 3, \ldots$ geldt

$$f_{X+Y}(z) = \sum_{y=1}^{z-1} f(z-y, y) = \sum_{y=1}^{z-1} \frac{C}{(z-1)z(z+1)} = \frac{C}{z(z+1)}.$$

Verder $f_{X+Y}(z) = 0$ elders.

(3c) Bereken

$$1 = \sum_{x=1}^{\infty} f(x) = \frac{C}{2} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x(x+1)} = \frac{C}{2} \sum_{x=1}^{\infty} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right] = \frac{C}{2}.$$

De laatste som is weer telescoperend. Derhalve $C = 2$.

(4a) Voor $u \in (0,1)$ geldt

$$F_{X^2}(u) = P(X^2 \leq u) = P(X \leq \sqrt{u}\,) = \sqrt{u}.$$

Derhalve $f_{X^2}(u) = F'_{X^2}(u) = 1/(2\sqrt{u})$ voor $u \in (0,1)$. Verder $f_{X^2}(u) = 0$ elders.

(4b) Voor $v \in (0,1)$ geldt

$$\begin{aligned} F_{YZ}(v) &= P(YZ \leq v) = P(YZ \leq v, Y \leq v) + P(YZ \leq v, Y > v) \\ &= P(Y \leq v) + P(Z \leq v/Y, Y > v) \\ &= \textstyle\int_0^v f_Y(u)du + \int_v^1 f_Y(u)\frac{v}{u}du \\ &= \textstyle\int_0^v du + \int_v^1 \frac{v}{u}du = v - v\log v. \end{aligned}$$

Derhalve $f_{YZ}(v) = F'_{YZ}(v) = -\log v$ voor $v \in (0,1)$. Verder $f_{YZ}(v) = 0$ elders.

(4c) Bereken

$$\begin{aligned} P(X^2 > YZ) &= P(YZ \leq X^2) = \textstyle\int_0^1 f_{X^2}(u)F_{YZ}(u)du \\ &= \textstyle\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{u}}(u - u\log u)du \\ &= \left[\frac{5}{9}u^{3/2} - \frac{1}{3}u^{3/2}\log u\right]_{u=0}^{u=1} = \frac{5}{9}. \end{aligned}$$

(5a) Zij X het aantal gewonnen wedstrijden. De kansmassafunctie van X is

$$f(x) = \binom{15}{x}\left(\frac{2}{5}\right)^x\left(\frac{3}{5}\right)^{15-x} \qquad (x = 0, \ldots, 15).$$

Geldt $P(X \leq 6) = \sum_{x=0}^{6} f(x)$. Volgens het Statistisch Compendium is dit gelijk aan $P(\mathrm{Bin}(15, 0.4) \leq 6) \approx 0.6098$.

(5b) Toepassen van de continuiteitscorrectie levert dat de gevraagde kans gelijk is aan

$$\begin{aligned} P(3.5 \leq X \leq 8.5) &= P\left(\frac{3.5-6}{\sqrt{\frac{90}{25}}} \leq X \leq \frac{8.5-6}{\sqrt{\frac{90}{25}}}\right) \\ &\approx P\left(-\tfrac{5}{12}\sqrt{10} \leq Z \leq \tfrac{5}{12}\sqrt{10}\right) \\ &= \Phi(1.32\ldots) - \Phi(-1.32\ldots) = 2\Phi(1.32\ldots) - 1. \end{aligned}$$

Hier is Z een standaard normaal verdeelde stochastische variable en gebruiken we dat $E(X) = 15 \times \frac{2}{5} = 6$ en $\mathrm{Var}(X) = 15 \times \frac{2}{5}(1 - \frac{2}{5}) = \frac{90}{25}$. Volgens het Statistisch Compendium is $\Phi(1.32) \approx 0.9066$. Derhalve is de gevraagde kans ≈ 0.8132.