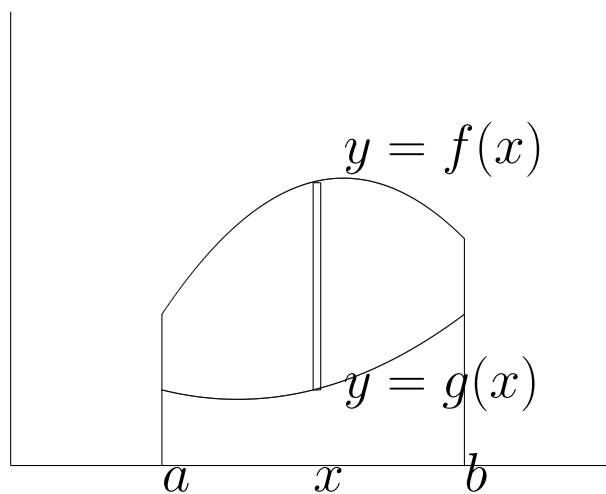


# Aanvullingen zwaartepunt

## Calculus voor Bouwkunde (2DB03), voor het schakelprogramma

### 1 Zwaartepunten

In Figuur 1 is getekend het gebied in het  $x, y$ -vlak dat begrensd wordt door de grafieken van  $y = f(x)$  en  $y = g(x)$  en de lijnen  $x = a$  en  $x = b$ , waarbij we aannemen dat op  $[a, b]$  geldt  $g(x) \leq f(x)$ .



Figuur 1

De oppervlakte van dit gebied wordt gegeven door

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

In dit gebied is een verticale strook getekend op afstand

$x$  van de  $y$ -as en met een breedte  $dx$ . Onder het *moment* van zo'n strook ten opzichte van de  $y$ -as verstaan we de oppervlakte van de strook  $\times$  de afstand tot de  $y$ -as, dus  $x (f(x) - g(x)) dx$ . Het *totale moment* van dit gebied ten opzichte van de  $y$ -as wordt dan

$$\int_a^b x (f(x) - g(x)) dx.$$

Ook bekijken we het moment ten opzichte van de  $x$ -as. Als afstand voor de aangegeven strook tot de  $x$ -as nemen we de afstand van het midden van de strook tot de  $x$ -as, dus  $\frac{1}{2} (f(x) + g(x))$ . Het moment van deze strook ten opzicht van de  $x$ -as is dan gelijk aan

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (f(x) + g(x)) (f(x) - g(x)) dx = \\ \frac{1}{2} (f(x)^2 - g(x)^2) dx. \end{aligned}$$

Het totale moment van het gebied ten opzichte van de  $x$ -as wordt dan gegeven door

$$\int \frac{1}{2} (f(x)^2 - g(x)^2) dx.$$

Het *zwaartepunt* van het gegeven gebied wordt nu gedefinieerd als het punt met coördinaten  $(\bar{x}, \bar{y})$  zodat geldt:

$$A \cdot \bar{x} = \text{totale moment ten opzichte van de } y\text{-as}$$

$A \cdot \bar{y} =$  totale moment ten opzichte van de  $x - as$ .

De coördinaten van het zwaartepunt worden dus gegeven door de volgende uitdrukkingen:

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \int_a^b x (f(x) - g(x)) dx$$

$$\bar{y} = \frac{1}{2A} \int_a^b (f(x)^2 - g(x)^2) dx.$$

In het bijzonder als  $g(x) = 0$  dan worden de coördinaten van het gebied begrensd door de grafiek van  $f(x)$ , de  $x$ -as en de lijnen  $x = a$  en  $x = b$  gegeven door:

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \int_a^b x f(x) dx$$

$$\bar{y} = \frac{1}{2A} \int_a^b f(x)^2 dx.$$

## Opgaven

Bepaal van elk van de volgende gebieden de coördinaten van het zwaartepunt.

1. Het gebied begrensd door de  $x$ -as, de grafiek van  $f(x) = \sin x$  en  $0 \leq x \leq \pi$ .
2. Het gebied dat gegeven wordt door  $0 \leq y \leq 2 - x^2$ .
3. Het gebied dat begrensd wordt door de  $x$ -as, de grafiek van  $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$  en  $-R \leq x \leq R$ .
4. Het gebied dat begrensd wordt door de grafieken van  $f(x) = \sqrt{x}$  en  $g(x) = x^2$ , waarbij  $0 \leq x \leq 1$ .