2 Spreidingsvoortplanting

In het vorige hoofdstuk hebben we ons beziggehouden met eenvoudige analyses achteraf van meetgegeven. Naast analyse achteraf van data is het ook belangrijk om vooraf rekening te houden met onzekerheden in metingen. Het is zeer vervelend als achteraf blijkt dat onze metingen te onnauwkeurig zijn om tot gewenste conclusies te komen. Daarom dient een nauwkeurigheidsanalyse een vast onderdeel van een experiment te zijn. Hierbij speelt met name kansrekening een belangrijke rol.

Kernbegrippen van dit hoofdstuk:

- verwachting en variantie van een stochast
- foutenvoortplanting
- significantie

We hebben tot nu toe impliciet aangenomen dat uitkomsten van metingen uit één enkele handeling bestaan. Dit is echter zelden het geval. Zelfs bij een simpele titratie moeten we bijvoorbeeld een begin- en eindstand van een buret aflezen. Beide aflezingen hebben hun eigen meetnauwkeurigheid. De uiteindelijke uitkomst van de titratie is het verschil van eind- en beginstand. De meetnauwkeurigheid van dit verschil is een functie van de afzonderlijke meetnauwkeurigheden. Als we de concentratie van een stof willen bepalen, moeten afzonderlijk de massa en het volume bepaald worden. Indien de afzonderlijke afwijkingen van massa en volume bekend zijn en bekend is hoe de afzonderlijke afwijkingen zich voortplanten, moet het mogelijk zijn de afwijking in het eindresultaat te berekenen. Het is dus altijd van belang te onderzoeken welke handelingen er verricht moeten worden bij een bepaling, en wat de invloed van deze handelingen is op het eindresultaat. Vaak treedt deze vraagstelling in omgekeerde vorm op. In zulke gevallen wordt een bepaalde meetnauwkeurigheid geëist van de eindresultaat en wil men bepalen wat voor consequenties dit heeft voor de nauwkeurigheden van deelresultaten.
In voorgaande paragrafen hebben we gezien dat we de grootte van toevallige afwijkingen door de variantie van een kansverdeling kunnen modelleren. Systematische afwijkingen modelleren we door de verwachte waarde van een kansverdeling. In deze paragraaf zullen we methoden uit de kansrekening leren om verwachting en variantie te berekenen voor metingen die uit deelmetingen zijn opgebouwd.

De berekeningen met integralen in deze paragraaf dienen slechts ter illustratie en zijn geen tentamenstof!

We beschouwen in deze paragraaf stochasten met een continue kansverdeling. Een dergelijke stochast is eenduidig vastgelegd als we de dichtheid *f* geven. Immers, er geldt dat $P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$. Voorbeelden van veelgebruikte continue kansverdelingen zijn:

1. **uniforme verdeling op [0,1]**: $f(x) = 1,\ 0 < x < 1$.
2. **exponentiële verdeling** : $f(x) = \lambda e^{-\lambda x},\ x > 0$ (wordt o.a. gebruikt bij levensduren van apparaten of verblijftijden van moleculen in een chemische reactor).

3. **normale verdeling** : $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$, $-\infty < x < \infty$. Het feit dat inderdaad een dichtheid vergt enige niet-triviale berekeningen (het kan bijvoorbeeld via overgang naar poolcoördinaten).
4. **Maxwellverdeling** : $f(x)=4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}x^2e^{-mx^2/2kT}$, $x>0$ (beschrijft de snelheidsverdeling van moleculen in een ideaal gas). Het feit dat deze functie inderdaad een dichtheid is kan bewezen worden via de Gammafunctie, gedefinieerd als $\Gamma(y)=\int_0^\infty e^{-t}t^{y-1}dt$, $y>0$. Deze integraal kan niet voor alle waarden van y uitgerekend worden. Voor onze doeleinden is het voldoende om de volgende eigenschappen te kennen:
   - $\Gamma(n+1)=n!=n(n-1)\cdots 2.1$ als n een niet-negatief geheel getal is
   - $\Gamma(y+1)=y\Gamma(y)$ als $y>0$
   - $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$.

   We vereenvoudigen nu de dichtheid van de Maxwellvergelijking door $c=\sqrt{\frac{m}{kT}}$ te schrijven: $f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}c^3x^2e^{-c^2x^2/2}$. De integraal $\int_0^\infty f(x)dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}c^3\int_0^\infty x^2e^{-c^2x^2/2}dx$ kan nu via de substitutie $t=\frac{1}{2}c^2x^2$ overgevoerd worden in de integraal (vergeet niet dat om ook mee te nemen dat $dt=c^2xdx$) : $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty t^{1/2}e^{-t}dt=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\Gamma(\frac{3}{2})=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}=1$.

Zij X een stochast met dichtheid f. De **verwachting** (Engels: expectation) van X wordt gedefinieerd door $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx$. De intuïtie hierachter is dat we alle mogelijke uitkomsten x bekijken en dan een gewogen gemiddelde nemen. Uitkomsten die een grotere kans hebben, worden zwaarder meegenomen omdat de dichtheidsfunctie groter is voor die uitkomsten. De verwachting geeft dus in zekere het centrum van de kansverdeling aan. Het uitrekenen van deze verwachtingen is niets anders dan het berekenen van een integraal. We geven nu enkele voorbeelden van berekeningen van verwachtingen:

1. **uniforme verdeling op [0,1]**: $E(X)=\int_0^1 xdx=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{x=0}^{x=1}=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}$.
2. **exponentiële verdeling** : $E(X)=\int_0^\infty \lambda xe^{-\lambda x}dx=\left[\dfrac{-e^{-\lambda x}}{\lambda}-xe^{-\lambda x}\right]_{x=0}^{x=\infty}=\dfrac{1}{\lambda}$.
3. **normale verdeling** : via de substitutie $y=x-\mu$ kan men op grond van symmetrie laten zien dat μ de verwachting van een normale verdeling met parameters μ en σ^2.
4. **Maxwellverdeling**: een berekening is mogelijk via eigenschappen van de Gammafunctie (zie opgaven).

De **variantie** van een stochast wordt gedefinieerd door (de gelijktekens volgen uit kleine berekeningen die hier weggelaten worden):

$$Var(X)=E\left(X-E(X)\right)^2=\int_{-\infty}^{\infty}\left(x-E(x)\right)^2 f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x)dx-\left(\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx\right)^2=E\left(X^2\right)-\left(E(X)\right)^2.$$

De variantie is een maat voor de spreiding van een kansverdeling. Men weegt hier alle gekwadrateerde afwijkingen van de verwachting. De reden om te kwadrateren is dat zonder kwadrateren alle afwijkingen tegen elkaar wegvallen en er dus altijd 0 uitkomt.. We geven nu enkele voorbeelden van berekeningen van varianties:

1. **uniforme verdeling op [0,1]**: $E(X^2)=\int_0^1 x^2dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{x=0}^{x=1}=\frac{1}{3}$, dus $Var(X)=E\left(X^2\right)-\left(E(X)\right)^2=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$.
2. **exponentiële verdeling**: $E(X^2)=\lambda\int_0^\infty x^2e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{\lambda^2}\int_0^\infty t^2e^{-t}dt=\frac{1}{\lambda^2}\Gamma(3)=\frac{2}{\lambda^2}$, dus $Var(X)=E\left(X^2\right)-\left(E(X)\right)^2=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}$
3. **normale verdeling**: met behulp van de Gammafunctie (of via partiële integratie) kan bewezen worden dat de variantie van een normale verdeling met parameters μ en σ^2 gelijk aan σ^2

Om nu de vraagstelling uit de inleiding te beantwoorden, is het noodzakelijk om regels te hebben die aangeven hoe verwachting en variantie van een samengestelde stochast berekend kunnen worden.

We beginnen met rekenregels voor zogenaamde lineaire combinaties van stochasten X_i met verwachting μ_i en variantie σ_i^2. Een lineaire combinatie is een som $a_1X_1+\cdots+a_nX_n$.

Rekenregel 1: $E\left(a_1X_1+\cdots+a_nX_n\right)=a_1\mu_1+\cdots+a_n\mu_n$

Voor varianties ligt de zaak iets ingewikkelder. Dit komt omdat varianties gedefinieerd zijn in termen van kwadraten. Zo is $(a+b)^2\neq a^2+b^2$. Indien de stochasten X_i echter onafhankelijk zijn (d.w.z., de verschillende metingen beïnvloeden elkaar niet), dan geldt er wel een eenvoudige formule.

Rekenregel 2 (onafhankelijke stochasten): $Var\left(a_1X_1+\cdots+a_nX_n\right)=a_1^2\sigma_1^2+\cdots+a_n^2\sigma_n^2$.

Voorbeeld: Bij een titratie is de beginwaarde van de buret 3,51 ml met een standaardafwijking van 0,02 ml en de eindwaarde 15,67 ml met een standaardafwijking van 0,03 ml. Wat is de standaardafwijking van de gebruikte hoeveelheid titrant?
Oplossing: Voor onafhankelijke stochasten geldt: Var(X-Y) = Var (X) + $(-1)^2$ Var (Y) = Var (X) + Var (Y). Dus hier geldt Var (gebruikte titrant) = $0{,}03^2$ + $0{,}02^2$ = 0,0013. De standaardafwijking is dus $\sqrt{0{,}0013}$ = 0,036.

Voorbeeld (vervolg): Stel dat de begin- en eindwaarde van de titratie beide met dezelfde meetnauwkeurigheid afgelezen kunnen worden. Hoe groot mag de standaardafwijking van een enkele aflezing zijn als het verschil een standaardafwijking van maximaal 0,03 mag hebben?

Oplossing: Noem de gevraagde standaardwijking σ. Dan volgt uit rekenregel 2 dat $\sqrt{\sigma^2+\sigma^2}=\sqrt{2\sigma^2}\le 0{,}03 \Leftrightarrow \sigma^2 \le \dfrac{0{,}03^2}{2}=0{,}00045 \Leftrightarrow \sigma \le 0{,}021$.

Lineaire combinaties van normaal verdeelde stochasten zijn altijd normaal verdeeld (zelfs bij afhankelijke stochasten). Dit geldt in het algemeen niet voor andere kansverdelingen.

De term $E\left(X^2\right)$(wat niet gelijk is aan $\left(E(X)\right)^2$!) in de definitie van variantie kan enerzijds gezien worden als de verwachting van de stochast X^2, anderzijds kan bewezen worden dat dit gelijk is aan $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx$. Dit is een speciaal geval van een algemene wet.

Rekenregel 3: $Eg(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$, waarbij *f* de dichtheid is van *X*.

Voorbeeld: als X exponentieel verdeeld is met $\lambda=1$, dan is $E\left(\sqrt{X}\right)=\int\limits_{0}^{\infty}\sqrt{x}e^{-x}dx=\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. Merk op dus op dat $E\left(\sqrt{X}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\neq 1=\sqrt{E(X)}$

Stel dat het eindresultaat *z* verkregen wordt door de onafhankelijke variabelen x_1 en x_2. Dus *z* is een functie van x_1 en x_2, weergegeven $z = g\ (x_1,x_2)$. Via een wiskundige methode (Taylorontwikkeling) kan afgeleid worden dat bij benadering de volgende formules gelden voor de variantie van de stochast $Z = g(X_1,X_2)$:

$$\boxed{\begin{aligned}E(Z) &\approx g(\mu_1,\mu_2)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^{\,2}}\right)_{(x_1,x_2)=(\mu_1,\mu_2)}\cdot Var(X_1)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x_2^{\,2}}\right)_{(x_1,x_2)=(\mu_1,\mu_2)}\cdot Var(X_2)\\ Var(Z) &\approx \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}\right)^2_{(x_1,x_2)=(\mu_1,\mu_2)}\cdot Var(X_1)+\left(\frac{\partial g}{\partial x_2}\right)^2_{(x_1,x_2)=(\mu_1,\mu_2)}\cdot Var(X_2)\end{aligned}}$$

De formule voor de variantie van $g(X_1,X_2)$ staat bekend onder de naam **spreidingsvoortplantingswet**. Bovenstaande formules zijn gegeven voor het geval dat we functies van twee variabelen beschouwen. In het geval dat we een functie van slechts één variabele hebben, zijn alle afgeleiden naar x_2 gelijk aan 0 en vereenvoudigt de formule op voor de hand liggende wijze:

$$\boxed{\begin{aligned}E(Z) &\approx g(\mu_X)+\frac{1}{2}g''(\mu_X)Var(X)\\ Var(Z) &\approx \left(g'(\mu_X)\right)^2 Var(X)\end{aligned}}$$

De veralgemening naar meer variabelen geldt ook en is makkelijk zelf op te schrijven. We bespreken nu enkele concrete toepassingen van de spreidingsvoortplantingswet, d.w.z. we passen deze wet toe voor enkele veel voorkomende functies *f*.

Wortels

$$Z = g(X) = \sqrt{X} \quad \textbf{en dus} \quad \begin{aligned} E(Z) &\approx \sqrt{\mu_X} + \frac{1}{2} g''(\mu_X) Var(X) = \sqrt{\mu_X} - \frac{\sigma_X^2}{8\mu_X^{3/2}} \\ Var(Z) &\approx \left(g'(\mu_X)\right)^2 Var(X) = \frac{\sigma_X^2}{4\mu_X} \end{aligned}$$

In het geval van een exponentiële verdeling met $\lambda = 1$ krijgen we dus dat $E(Z) \approx 1 - \frac{1}{8} = 0{,}875 \approx 0{,}886 = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ (het laatste is de exacte waarde die we al eerder hadden uitgerekend).

Logaritmen

$$Z = g(X) = {}^{10}\log X = 0{,}434 \ln X \text{ en dus } Var(Z) \approx \left(g'(\mu_X)\right)^2 Var(X) = \left(\frac{0{,}434}{\mu_X}\right)^2 \sigma_X^2$$

In het geval van natuurlijke logaritmen geldt:

$$Z = g(X) = \ln X \quad \textbf{en dus} \quad \begin{aligned} E(Z) &\approx \ln \mu_X + \frac{1}{2} g''(\mu_X) Var(X) = \ln \mu_X - \frac{\sigma_X^2}{2\mu_X} \\ Var(Z) &\approx \left(g'(\mu_X)\right)^2 Var(X) = \frac{\sigma_X^2}{\mu_X^2} \end{aligned}$$

Vermenigvuldigen

$Z = g(X_1, X_2) = kX_1X_2$ (*k* is een constante)

$$E(Z) \approx g(\mu_1, \mu_2) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}\right)_{(x_1,x_2)=(\mu_1,\mu_2)} Var(X_1) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}\right)_{(x_1,x_2)=(\mu_1,\mu_2)} Var(X_2) = k\mu_1\mu_2$$

$$Var(Z) \approx \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}\right)^2_{(x_1,x_2)=(\mu_1,\mu_2)} Var(X) + \left(\frac{\partial g}{\partial x_2}\right)^2_{(x_1,x_2)=(\mu_1,\mu_2)} Var(X_2) = k^2\mu_2^2\sigma_1^2 + k^2\mu_1^2\sigma_2^2$$

Het is handig de laatste relatie te herschrijven tot één tussen de variatiecoëfficiënten :

$$\left(\frac{\sigma_z}{\mu_z}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_1}{\mu_1}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{\mu_2}\right)^2 \qquad \text{ofwel:} \qquad \frac{\sigma_z}{\mu_z} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_1}{\mu_1}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{\mu_2}\right)^2}$$

Delen

$Z = g(X_1, X_2) = k\dfrac{X_1}{X_2}$ (*k* is een constante)

$$E(Z) \approx g(\mu_1,\mu_2) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^{\,2}}\right)_{(x_1,x_2)=(\mu_1,\mu_2)} Var(X_1) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x_2^{\,2}}\right)_{(x_1,x_2)=(\mu_1,\mu_2)} Var(X_2) = k\frac{\mu_1}{\mu_2} - k\frac{\mu_1\sigma_2^2}{\mu_2^3}$$

$$Var(Z) \approx \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}\right)^2_{(x_1,x_2)=(\mu_1,\mu_2)} Var(X) + \left(\frac{\partial g}{\partial x_2}\right)^2_{(x_1,x_2)=(\mu_1,\mu_2)} Var(X_2) = k^2\frac{\sigma_1^2}{\mu_2^2} + k^2\left(\frac{\mu_1}{\mu_2^2}\right)^2\sigma_2^2$$

Het is handig de laatste relatie te herschrijven tot één tussen de variatiecoëfficiënten :

$$\left(\frac{\sigma_z}{\mu_z}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_1}{\mu_1}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{\mu_2}\right)^2 \qquad \text{ofwel:} \quad \frac{\sigma_z}{\mu_z} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_1}{\mu_1}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{\mu_2}\right)^2}$$

Voorbeeld

Gegeven: z = pH = 3,0; $[H^+] = 1{,}0\cdot 10^{-3}$ M.; $\sigma_z = 0{,}1$

Bereken de variatiecoëfficiënt in $[H^+]$

$$z = -\log[H^+] = -0{,}434\ln[H^+]$$

$$Var_z = \left(\frac{\partial z}{\partial [H^+]}\right)^2 Var_{H^+} \quad \text{ofwel:} \quad \sigma_z = \left(\frac{\partial z}{\partial [H^+]}\right)\sigma_{H^+} = -\left(\frac{0{,}434}{[H^+]}\right)\sigma_{H^+}$$

$$\left|\frac{\sigma_{H^+}}{[H^+]}\right| = 2{,}3\,\sigma_z = 2{,}3\cdot 0{,}1 = 0{,}23$$

Variatiecoëfficiënt (CV): $0.23\cdot 100\,\% = 23\,\%$

N.B. Het is foutief om de spreidingsvoortplantingswet toe te passen op het verband tussen pH en $[H^+]$ in de vorm $10^{-pH}=[H^+]$. Men moet altijd uitgaan van de fundamentele chemische grootheid. Spreiding in $[H^+]$ heeft spreiding in pH tot gevolg (niet omgekeerd). Indien men dit niet goed in acht neemt zijn foutieve antwoorden het gevolg.

Het zal duidelijk zijn dat als we de spreidingsvoortplantingswet toepassen, dat de σ's van de gebruikte apparaten bekend moeten zijn. Enkele veel voorkomende apparaten met bijbehorende standaardafwijkingen (σ) zijn:

maatkolf 500,0 ml	σ = 0,25 ml
maatkolf 100,0 ml	σ = 0,10 ml
pipet 25,00 ml	σ = 0,02 ml
buret (2 keer aflezen)	σ = 0,03 ml
motorburet (2 keer)	σ = 0,01 ml
balans (2 keer aflezen)	σ = 0,14 mg

De standaardafwijking geeft aan hoe nauwkeurig een eindresultaat kan worden opgegeven. Hierbij geldt als regel dat de standaardafwijking in één, hoogstens twee cijfers nauwkeurig wordt opgegeven. De uitkomst zelf wordt daarbij zinvol afgerond. Bijvoorbeeld, indien we een eindresultaat krijgen van x = 13,2456 met σ = 0,09 dan wordt het eindresultaat 13,2. Dit brengt ons direct tot het begrip significantie.

Significantie

In het voorbeeld x = 13,2456 met σ = 0,09 hebben de cijfers 4, 5 en 6 helemaal geen zin (ze zijn niet significant), gezien de gegeven σ. We mogen de uitkomst dan ook in slechts 3 significante cijfers weergeven, n.l. 13,2. Hoe nauwkeuriger de meetapparatuur des te meer significante cijfers zijn geoorloofd. Bijvoorbeeld met een maatcilinder meten we een volume van 41 ml, terwijl de vloeistof die uit een buret stroomt heeft een volume van 42,23 ml. In het eerste geval hebben we twee significante cijfers, in het tweede geval vier.

Verwarring kan ontstaan wanneer het cijfer nul in een meetwaarde voorkomt. Elke nul die nodig is om de decimale komma aan te geven is geen significant cijfer. Zo heeft 0,005 slechts één significant cijfer, maar 2,0400 heeft er vijf. Voor het bepalen van het aantal significante cijfers tellen de nullen voorop een getal niet mee, er tussen in of op het eind wel. Mogen we een meetwaarde van vierduizend slechts met één significant cijfer weergeven, dan wordt dat: $4{\cdot}10^3$. Als we de meetwaarde vierduizend als 4000 of als $4{,}000{\cdot}10^3$ opschrijven, impliceert dat een significantie van vier.

Enkele voorbeelden van meetwaarden, waarbij tussen haakjes het aantal significante cijfers staat dat geoorloofd is.

meetwaarde		juiste schrijfwijze
12,270	(5)	
12,3	(4)	12,30
10	(1)	$1{\cdot}10^1$
43100	(3)	$4{,}31{\cdot}10^4$
0,050	(2)	

Om bij berekeningen snel te weten te komen uit hoeveel significante cijfers het eindresultaat bestaat en dus te voorkomen dat je een nauwkeurigheidsanalyse moet doen, bestaan twee vuistregels; één voor optellen en aftrekken, en één voor vermenigvuldigen en delen.
Bij optellen en aftrekken krijgt de uitkomst evenveel plaatsen achter de komma als díe meetwaarde met het minste aantal plaatsen achter de komma.
bijvoorbeeld: 0,03 + 0,12 + 0,4576 = 0,61
Bij vermenigvuldigen en delen krijgt de uitkomst evenveel significante cijfers als díe meetwaarde met het kleinste aantal significante cijfers.
bijvoorbeeld: $0{,}12 \cdot 9{,}678234 = 1{,}2$
Het verdient aanbeveling tijdens een berekening meer significante cijfers mee te nemen, omdat anders het eindresultaat afrondingsfouten bevat.

Slotopmerking:

Indien we de betrouwbaarheid van een eindresultaat willen weten en we gebruik willen maken van de spreidingsvoortplantingswet, dan moeten we bedenken dat we dan alleen gebruik maken van de door ons opgegeven afwijkingen van bekende parameters. Eventuele onbekende parameters die bij het eindresultaat een rol zouden kunnen spelen worden hierbij niet meegenomen.

Als we daarentegen een grote steekproef zouden doen en de uitkomsten statistisch verwerken, dan zouden alle mogelijke onzekerheden (ook onbekende) worden meegenomen. Bijvoorbeeld bij een zuur/basentitratie worden bij de spreidingsvoortplantingswet alleen de afwijkingen van de balans en de buret meegenomen, terwijl met de onzekerheid in het waarnemen van de kleuromslag geen rekening wordt gehouden.