TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Tentamen Functies van meer variabelen (2DE06) op maandag 22 augustus 2005, 14.00 – 17.00 uur.

De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden. Bovendien dient U in alle gevallen uw antwoord te beargumenteren!

Een **niet-grafische** rekenmachine is toegestaan.

---

1. Beschouw de functie f gegeven door:

$$f(x,y) = \frac{x\cos(xy)}{y^2+1}.$$

Bereken de vergelijking van het raakvlak in het punt $(1,0,1)$ aan de grafiek van de functie f.

2. Bereken de lijnintegraal:

$$\int_{\mathcal{K}} xy^3 \, \mathrm{d}s.$$

Hierbij is $\mathcal{K}$ de doorsnijdingskromme van de bol $x^2+y^2+z^2=1$ en het vlak $z=x$.

3. Bereken

$$\iint_S y \, \mathrm{d}A.$$

Hier is het gebied S gegeven door:

$$S = \left\{ (x,y) \mid x^2+y^2 \geq 2,\ \ x^2+2y^2 \leq 4,\ \ x \geq 0,\ \ y \geq 0 \right\}.$$

4. Definieer de functie $f(x,y)$ door:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 y} & \text{als } \sin^2 x + \cos^2 y \neq 0, \\ 0 & \text{als } \sin^2 x + \cos^2 y = 0. \end{cases}$$

Is de functie f continu in $(0, \frac{\pi}{2})$? Beargumenteer uw antwoord !

5. De functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is gedefinieerd door:

$$f(x,y) = x\ln(x^2+y^2+1).$$

Bereken de richtingsafgeleide in het punt $(1,0)$ in de richting $(1,1)$.

z.o.z.

Tentamen Functies van meer variabelen (2DE06) op maandag 22 augustus 2005, 14.00 – 17.00 uur.

---

6. Gegeven het gebied $\mathcal{K}$ als de doorsnede van het inwendige van de cylinder $x^2 + y^2 = 2x$ en het gebied $z^2 \leq y$. Bereken:

$$\iiint_{\mathcal{K}} \sqrt{y}\, \mathrm{d}V.$$

7. Zij S het deel van de bol $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ dat in het eerste octant ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$) ligt, met een normaalvector die naar boven wijst. Zij $\mathbf{F}$ het vectorveld gegeven door

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} z \\ x \\ -x \end{pmatrix}.$$

Bereken de flux door het oppervlak S als gevolg van het vectorveld $\mathbf{F}$, d.w.z.

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}.$$

8. Bereken de volgende integraal:

$$\int_0^1 \int_0^{2\sqrt{1-x}} \frac{\sin((y-2)^2)}{\sqrt{1-x}}\, \mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

Hint: het is verstandig de integratievolgorde te verwisselen!

Voor de vraagstukken kunnen de volgende aantallen punten worden behaald:

Vraagstuk	1.	6 punten	Vraagstuk	2.	7 punten	Vraagstuk	3.	7 punten
Vraagstuk	4.	4 punten	Vraagstuk	5.	4 punten	Vraagstuk	6.	8 punten
Vraagstuk	7.	8 punten	Vraagstuk	8.	6 punten			

Het cijfer wordt bepaald door het totaal der behaalde punten door 5 te delen.

TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Uitwerking tentamen Functies van meer variabelen (2DE06) op maandag 22 augustus 2005, 14.00 – 17.00 uur.

1.

> Beschouw de functie f gegeven door:
>
> $$f(x,y) = \frac{x\cos(xy)}{y^2+1}.$$
>
> Bereken de vergelijking van het raakvlak in het punt $(1,0,1)$ aan de grafiek van de functie f.

We hebben:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\cos(xy)}{y^2+1} - \frac{xy\sin(xy)}{y^2+1},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2xy\cos(xy)}{(y^2+1)^2} - \frac{x^2\sin(xy)}{y^2+1}.$$

We vinden:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 1, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 0.$$

De vergelijking van het raakvlak wordt dus gegeven door:

$$z - 1 = 1(x-1) + 0(y-0),$$

of

$$z = x.$$

2.

> Bereken de lijnintegraal:
>
> $$\int_{\mathcal{K}} xy^3\,\mathrm{d}s.$$
>
> Hierbij is $\mathcal{K}$ de doorsnijdingskromme van de bol $x^2+y^2+z^2 = 1$ en het vlak $z = x$.

Als we $z = x$ invullen in de vergelijking voor de bol krijgen we

$$2x^2 + y^2 = 1.$$

De parameterisatie ligt voor de hand omdat x en y op een ellips liggen:

$$x = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\cos\theta, \quad y = \sin\theta, \quad z = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\cos\theta.$$

met $0 \le \theta \le 2\pi$. Dan geldt:

$$\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)^2} = \sqrt{\tfrac{1}{2}\sin^2\theta + \cos^2\theta + \tfrac{1}{2}\sin^2\theta} = 1.$$

We krijgen:

$$\int_{\mathcal{K}} xy^3 \, \mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\cos\theta \sin^3\theta \, \mathrm{d}\theta$$

We gebruiken de substitutie $p = \sin\theta$ met

$$\mathrm{d}p = \cos\theta \, \mathrm{d}\theta$$

en vinden:

$$\int_0^0 \tfrac{1}{2}\sqrt{2}p^3 \, \mathrm{d}p = 0.$$

3.

Bereken $$\iint_S y \, \mathrm{d}A.$$ Hier is het gebied S gegeven door: $$S = \left\{ (x,y) \mid x^2 + y^2 \geq 2, \;\; x^2 + 2y^2 \leq 4, \;\; x \geq 0, \;\; y \geq 0 \right\}.$$

We hebben

$$2 - y^2 \leq x^2 \leq 4 - 2y^2$$

De bovengrens moet natuurlijk altijd groter zijn dan de ondergrens dus we moeten verifiëren dat:

$$2 - y^2 \leq 4 - 2y^2$$

Hieruit volgt dat $y^{\leq}2$. Als we gebruiken dat $x \geq 0$ en $y^2 \leq 2$ vinden we:

$$\sqrt{2 - y^2} \leq x \leq \sqrt{4 - 2y^2}$$

We vinden dat:

$$\iint_S y \, \mathrm{d}A = \int_0^{\sqrt{2}} \int_{\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{4-2y^2}} y \mathrm{d}x \mathrm{d}y.$$

De binnenste integraal integreren levert op:

$$\int_0^{\sqrt{2}} y\sqrt{4 - 2y^2} - y\sqrt{2 - y^2} \mathrm{d}y.$$

en we krijgen:

$$\int_0^{\sqrt{2}} y\sqrt{4 - 2y^2} \mathrm{d}y - \int_0^{\sqrt{2}} y\sqrt{2 - y^2} \mathrm{d}y.$$

Voor de eerste integraal gebruiken we de substitutie $z = 4 - 2y^2$ en voor de tweede integraal gebruiken we de substitutie $v = 2 - y^2$. Dit resulteert in:

$$\int_4^0 \tfrac{-1}{4}\sqrt{z} \mathrm{d}z - \int_2^0 \tfrac{-1}{2}\sqrt{v} \mathrm{d}v.$$

en dit is gelijk aan:

$$\left[\tfrac{-1}{6} z^{3/2} \right]_4^0 - \left[\tfrac{-1}{3} v^{3/2} \right]_2^0 = \tfrac{2}{3}(2 - \sqrt{2}).$$

4.

Definieer de functie $f(x,y)$ door: $$f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x+\cos^2 y} & \text{als } \sin^2 x+\cos^2 y\neq 0,\\ 0 & \text{als } \sin^2 x+\cos^2 y=0.\end{cases}$$ Is de functie f continu in $(0,\frac{\pi}{2})$? Beargumenteer uw antwoord !

Merk op dat $(x,y)\to(0,\frac{\pi}{2})$ betekent $(v,w)\to(0,0)$ met $v=\sin x$ en $w=cos y$. We vinden

$$\lim_{(x,y)\to(0,\frac{\pi}{2})}\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x+\cos^2 y}=\lim_{(v,w)\to(0,0)}\frac{v^2}{v^2+w^2}.$$

Voor deze laatste limiet gaan we kijken wat er gebeurt als we langs de lijn $w=av$ naar $(0,0)$ gaan voor verschillende waarden van a. We krijgen:

$$\lim_{\substack{v\to 0\\ w=av}}\frac{v^2}{v^2+w^2}=\lim_{v\to 0}\frac{v^2}{v^2+a^2v^2}=\frac{1}{1+a^2}.$$

Voor continuïteit moet deze limiet 0 opleveren. Dit is niet het geval dus de functie is niet continu.

Een alternatief is om langs de lijn $y=ax+\frac{\pi}{2}$ naar $(0,\frac{\pi}{2})$ te lopen en we krijgen dan:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=ax+\frac{\pi}{2}}}\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x+\cos^2 y}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x+\cos^2(ax+\frac{\pi}{2})}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x+\sin^2(ax)}$$

Deze laatste limiet levert op:

$$\frac{1}{1+a^2}$$

en dit laat ook zien dat de functie niet continu is. Deze laatste limiet kun je berekenen via l'Hôpital of via de standaardlimieten:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{x}=a.$$

5.

De functie $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ is gedefinieerd door: $$f(x,y)=x\ln(x^2+y^2+1).$$ Bereken de richtingsafgeleide in het punt $(1,0)$ in de richting $(1,1)$.

We hebben:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\ln(x^2+y^2+1)+\frac{2x^2}{x^2+y^2+1},\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2xy}{x^2+y^2+1},$$

en de gradiëntvector in $(1,0)$ is dus gelijk aan

$$(1+\ln 2,0).$$

De richtingsafgeleide is het inproduct van de gradiëntvector met de richting maar dan moet die richtingsvector wel lengte 1 hebben. In ons geval is de lengte van de richtingsvector gelijk aan:

$$\sqrt{1+1} = 2$$

en de richtingsvector met lengte 1 is dus gelijk aan:

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{2}(1,1).$$

Het inproduct hiervan met de gradiëntvector levert op:

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,(1+\ln 2+0) = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}(1+\ln 2),$$

en de richtingsafgeleide is dus $1+\ln 2$.

6.

> Gegeven het gebied $\mathcal{K}$ als de doorsnede van het inwendige van de cylinder $x^2+y^2=2x$ en het gebied $z^2 \le y$. Bereken:
>
> $$\iiint_{\mathcal{K}} \sqrt{y}\,\mathrm{d}V.$$

De vergelijking voor het inwendige van de cylinder kan beschreven worden door:

$$(x-1)^2 + y^2 \le 1$$

hetgeen suggereert om een verschoven parameterisatie in de vorm van cylindercoordinaten te gebruiken:

$$x = 1 + r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z$$

Uit $y \ge z^2$ volgt $y \ge 0$ en dus moeten we hebben dat $\theta \in [0,\pi]$. Uit de vergelijking voor de cylinder volgt $r \le 1$. Tot slot vinden we uit $y \ge z^2$ dat:

$$-\sqrt{y} \le z \le \sqrt{y}$$

De correctieterm r voor cylindercoördinaten moeten we natuurlijk niet vergeten. Dit levert op:

$$\begin{aligned}
\iiint_{\mathcal{K}} \sqrt{y}\,\mathrm{d}V &= \int_0^{\pi}\int_0^1\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} r\sqrt{y}\mathrm{d}z\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\pi}\int_0^1\int_{-\sqrt{r\sin\theta}}^{\sqrt{r\sin\theta}} r\sqrt{r\sin\theta}\mathrm{d}z\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\pi}\int_0^1 2r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\pi} \tfrac{2}{3}\sin\theta\mathrm{d}\theta \\
&= \left[\tfrac{-2}{3}\cos\theta\right]_0^{\pi} \\
&= \tfrac{4}{3}
\end{aligned}$$

7.

Zij S het deel van de bol $x^2+y^2+z^2 = 1$ dat in het eerste octant ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$) ligt, met een normaalvector die naar boven wijst. Zij $\mathbf{F}$ het vectorveld gegeven door

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} z \\ x \\ -x \end{pmatrix}.$$

Bereken de flux door het oppervlak S als gevolg van het vectorveld $\mathbf{F}$, d.w.z.

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}.$$

Om de rand van de bol te parameteriseren gebruiken we bolcoördinaten:

$$x = \cos\theta \sin\varphi, \quad y = \sin\theta \sin\varphi, \quad x = \cos\varphi.$$

Uit het feit dat we alleen het eerste octant bekijken volgt dat:

$$0 \leq \theta \leq \tfrac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \varphi \leq \tfrac{\pi}{2}$$

We berekenen nu de normaal:

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -\cos\theta \sin^2\varphi \\ -\sin\theta \sin^2\varphi \\ -\sin\varphi \cos\varphi \end{pmatrix}$$

We willen de normaal naar boven laten wijzen en voegen dus een − teken toe. We krijgen:

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \cos\theta \sin\varphi \\ -\cos\theta \sin\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta \sin^2\varphi \\ \sin\theta \sin^2\varphi \\ \sin\varphi \cos\varphi \end{pmatrix} \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi$$

Dit levert op:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta \sin^3\varphi \, \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \tfrac{1}{2} \sin(2\theta) \sin\varphi (1 - \cos^2\varphi) \, \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi \\ &= \int_0^{\pi/2} \left[\tfrac{-1}{4} \cos(2\theta) \sin\varphi (1 - \cos^2\varphi)\right]_0^{\pi/2} \mathrm{d}\varphi \\ &= \int_0^{\pi/2} \tfrac{1}{2} \sin\varphi (1 - \cos^2\varphi) \, \mathrm{d}\varphi \end{aligned}$$

De substitutie $v = \cos\theta$ resulteert in:

$$\int_1^0 \tfrac{-1}{2} (1 - v^2) \, \mathrm{d}v = \tfrac{-1}{2} \left[v - \tfrac{1}{3} v^3\right]_1^0 = \tfrac{1}{3}.$$

8.

Bereken de volgende integraal:

$$\int_0^1 \int_0^{2\sqrt{1-x}} \frac{\sin((y-2)^2)}{\sqrt{1-x}} \, \mathrm{d}y \mathrm{d}x$$

Hint: het is verstandig de integratievolgorde te verwisselen!

De grenzen leveren op:

$$0 \le y^2 \le 4 - 4x, \quad y \ge 0, \quad 0 \le x \le 1$$

en dit kan worden herschreven als:

$$0 \le x \le 1 - \tfrac{1}{4}y^2, \quad 0 \le y \le 2$$

De integraal is dus gelijk aan:

$$\int_0^2 \int_0^{1-y^2/4} \frac{\sin((y-2)^2)}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Dit levert op

$$\int_0^2 \left[-2\sqrt{1-x}\sin((y-2)^2)\right]_{x=0}^{1-y^2/4} \mathrm{d}y = \int_0^2 -(y-2)\sin((y-2)^2)\mathrm{d}y$$

De substitutie $z = (y-2)^2$ levert dan op:

$$\int_4^0 -\tfrac{1}{2}\sin z\mathrm{d}z = \tfrac{1}{2}(1-\cos 4).$$