Gradiënt loodrecht op niveauvlak

In Adams, Sectie 12.7, blz. 681, Theorem 6 (ook blz. 687, Example 7), staat een belangrijke stelling, die tevens de belangrijkste resultaten van Sectie 12.3, blz. 654, omvat.
We vatten dit hieronder nog eens samen.

Stelling

Zij gegeven de continu differentieerbare scalaire functie

$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad n = 2,\ 3,$$

met niveauvlak

$$\mathcal{B} = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid g(\boldsymbol{x}) = c \right\}.$$

Dan staat ∇g *(in* $\mathcal{B}$*) loodrecht op* $\mathcal{B}$*. Anders gezegd,* ∇g *(in* $\mathcal{B}$*) is een normaalvector van* $\mathcal{B}$*.*

Bewijs

Beschouw een punt $\boldsymbol{x}_0 \in \mathcal{B}$ en een naburig punt $\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h} \in \mathcal{B}$. Beiden voldoen dus aan $g(\boldsymbol{x}_0) = c$ en $g(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) = c$. Benader $g(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h})$ lineair (1-e graads Taylorreeks) rond $\boldsymbol{x}_0$ voor kleine $|\boldsymbol{h}|$. We krijgen dan

$$g(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) - c \simeq g(\boldsymbol{x}_0) + \boldsymbol{h} \cdot \nabla g(\boldsymbol{x}_0) - c = \boldsymbol{h} \cdot \nabla g(\boldsymbol{x}_0) \simeq 0.$$

Dit geldt voor willekeurige (mits kleine) $\boldsymbol{h}$. Dus ∇g staat loodrecht op elke $\boldsymbol{h}$. Omdat in de limiet voor $|\boldsymbol{h}| \to 0$ de vector $\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h} - \boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{h}$ raakt aan $\mathcal{B}$, staat ∇g dus loodrecht op $\mathcal{B}$.

Gevolg

1. Het raakvlak van $\mathcal{B}$ in $\boldsymbol{x}_0 \in \mathcal{B}$ wordt gegeven door

   $$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) \cdot \nabla g(\boldsymbol{x}_0) = 0.$$

2. Stel, we zijn geïnteresseerd in het raakvlak aan de grafiek van de functie $f(x, y)$. Dan wordt dit gevormd door het raakvlak aan het niveauvlak $g(x, y, z) = f(x, y) - z = 0$. Omdat

   $$\nabla g = (f_x,\ f_y,\ -1),$$

   krijgen we dus

   $$(x - x_0)\, f_x(x_0, y_0) + (y - y_0)\, f_y(x_0, y_0) - 1 \cdot (z - z_0) = 0$$

   ofwel

   $$z = z_0 + (x - x_0)\, f_x + (y - y_0)\, f_y.$$

   Omdat $z_0 = f(x_0, y_0)$ is dit inderdaad gelijk aan de 1-e graads Taylorbenadering van f.

SW Rienstra 20-02-08