Gradiënt loodrecht op niveauvlak

In Adams (7e dr.), Sectie 12.7, blz. 715, Theorem 6 (ook blz. 722, Example 7), staat een belangrijke stelling, die tevens de belangrijkste resultaten van Sectie 12.3, blz. 684/5, omvat.

We vatten dit hieronder nog eens samen.

Stelling

Zij gegeven de continu differentieerbare scalaire functie

$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad n = 2,\ 3,$$

met niveauvlak

$$\mathcal{B} = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid g(\boldsymbol{x}) = c \right\}.$$

Dan staat ∇g (in $\mathcal{B}$) loodrecht op $\mathcal{B}$. Anders gezegd, ∇g (in $\mathcal{B}$) is een normaalvector van $\mathcal{B}$.

Bewijs

Beschouw een punt $\boldsymbol{x}_0 \in \mathcal{B}$ en een naburig punt $\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h} \in \mathcal{B}$. Beiden voldoen dus aan $g(\boldsymbol{x}_0) = c$ en $g(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) = c$. Benader $g(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h})$ lineair (1-e graads Taylorreeks) rond $\boldsymbol{x}_0$ voor kleine $|\boldsymbol{h}|$. Dan is

$$g(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) - c \simeq g(\boldsymbol{x}_0) + \boldsymbol{h} \cdot \nabla g(\boldsymbol{x}_0) - c = \boldsymbol{h} \cdot \nabla g(\boldsymbol{x}_0) \simeq 0.$$

Dit geldt voor willekeurige (mits kleine) $\boldsymbol{h}$. Dus ∇g staat loodrecht op elke $\boldsymbol{h}$. Omdat in de limiet voor $|\boldsymbol{h}| \to 0$ de vector $\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h} - \boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{h}$ raakt aan $\mathcal{B}$, staat ∇g dus loodrecht op $\mathcal{B}$.

Gevolg

1. Het raakvlak van $\mathcal{B}$ in $\boldsymbol{x}_0 \in \mathcal{B}$ wordt gegeven door

   $$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) \cdot \nabla g(\boldsymbol{x}_0) = 0.$$

2. Stel, we zijn geïnteresseerd in het raakvlak aan de grafiek van de functie $f(x, y)$. Dan wordt dit gevormd door het raakvlak aan het niveauvlak $g(x, y, z) = f(x, y) - z = 0$. Omdat

   $$\nabla g = (f_x,\ f_y, -1),$$

   krijgen we dus

   $$(x - x_0)\, f_x(x_0, y_0) + (y - y_0)\, f_y(x_0, y_0) - 1 \cdot (z - z_0) = 0$$

   ofwel

   $$z = z_0 + (x - x_0)\, f_x + (y - y_0)\, f_y.$$

   Omdat $z_0 = f(x_0, y_0)$ is dit inderdaad gelijk aan de 1-e graads Taylorbenadering van f.

3. Let op: $(f_x,\ f_y) \perp \{f(x, y) = c\}$, terwijl $(f_x,\ f_y, -1) \perp \{z = f(x, y)\}$.

SW Rienstra 21-02-11