TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Tentamen Functies van meerdere variabelen (2DE06) op dinsdag 16 januari 2007, 14.00 - 17.00 uur

---

Opmerkingen vooraf:
De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden. Bovendien dient u in alle gevallen uw antwoord te beargumenteren.
Een **niet-grafische** rekenmachine is toegestaan.

---

1. Gegeven is de functie $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ met
$$f(x,y) = xy^2 - x^2 - 4y^2 + 4x.$$
Bepaal alle punten $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ zodanig dat het raakvlak in $(a,b,f(a,b))$ aan de grafiek van f de $z-$ as loodrecht snijdt en geef ook de vergelijking van het raakvlak.

2. Gegeven is de functie $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ met
$$f(x,y) = \arctan(\frac{y}{x}).$$
Bereken $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

3. Gegeven is de functie $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ met
$$f(x,y) = (y - x^2)e^{3x+y}.$$
In welke richting $\mathbf{u} = u\,\mathbf{i} + v\,\mathbf{j}$ ($|\mathbf{u}| = 1$) is de richtingsafgeleide $D_{\mathbf{u}}f(-1,3)$ van f in $(-1,3)$ maximaal?
Wat is de waarde van $D_{\mathbf{u}}f(-1,3)$ in die richting?

4. D is het gebied dat ligt binnen cirkel C_1 met vergelijking $x^2 + y^2 = 4y$ en ook binnen cirkel C_2 met vergelijking $x^2 + y^2 = 4$.
Bereken de oppervlakte $\displaystyle\iint_D 1 \cdot dxdy$ van D.

5. Een gebied G in $\mathbb{R}^3$ is begrensd door de parabolische cilinder met vergelijking $z = 1 - y^2$ en door drie platte vlakken met vergelijkingen $z = 0$, $x = -1$, $x = 1$.
Bereken de integraal $\displaystyle\iiint_G 15y^2 e^x \, dV$.

Z.O.Z.

Tentamen Functies van meerdere variabelen (2DE06) op dinsdag 16 januari 2007, 14.00 - 17.00 uur

---

6. In $\mathbb{R}^3$ zijn gegeven:

   - Een vectorveld $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} - z\,\mathbf{j} + y\,\mathbf{k} = (x,\ -z,\ y)$.
   - Twee punten $P_1 = (-2, -3, -1)$ en $P_2 = (2, 3, -1)$.

   (a) P_1 en P_2 liggen op de kromme met parametervoorstelling $\mathbf{r}(t) = (2t,\ 3t,\ -t^2)$ met $t \in \mathbb{R}$. K is het deel van die kromme tussen de punten P_1 en P_2.
   Bereken de lijnintegraal
   $$\int_K \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$
   van $\mathbf{F}$ langs K, als K doorlopen wordt van P_1 naar P_2.

   (b) Door de punten $P_1 = (-2, -3, -1)$ en $P_2 = (2, 3, -1)$ is een rechte lijn bepaald. R is het deel van die rechte tussen de punten P_1 en P_2.
   Bereken ook de lijnintegraal
   $$\int_R \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$
   van $\mathbf{F}$ langs R, als R doorlopen wordt van P_1 naar P_2.

   (c) Is $\mathbf{F}$ een conservatief vectorveld?

7. Een oppervlak S wordt beschreven door:
   $$z = 4 - x^2 - y^2\,,\ \ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1.$$
   Een vectorveld $\mathbf{F}$ wordt gegeven door:
   $$\mathbf{F}(x, y, z) = xy\,\mathbf{i} + yz\,\mathbf{j} + zx\,\mathbf{k} = (xy,\ yz,\ zx).$$
   Bereken
   $$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS\,,$$
   de flux van $\mathbf{F}$ door oppervlak S in de "opwaartse" richting van de positieve $z-$ as.

Voor de vraagstukken kunnen de volgende aantallen punten worden behaald:

1	2	3	4	5	6a	6b	6c	7
5	4	4	7	6	6	7	2	9

Het cijfer wordt bepaald door het totaal der behaalde punten voor de opgaven 1 t/m 7 door 5 te delen en af te ronden op een geheel getal.

In de volgende tabel zijn α en β reële getallen en is a een positief reëel getal.

1. $\displaystyle\int x^\alpha\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha+1}\,x^{\alpha+1} + C & \text{als } \alpha \neq -1 \\ \ln|x| + C & \text{als } \alpha = -1 \end{cases}$

2. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$

3. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

4. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+\alpha}}\,dx = \ln|x+\sqrt{x^2+\alpha}| + C$

5. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{a} + C$

6. $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

7. $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C$

8. $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx = \tfrac{1}{2}(x - \sin x\cos x) + C$

9. $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx = \tfrac{1}{2}(x + \sin x\cos x) + C$

10. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \ln|\tan\frac{x}{2}| + C$

11. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}\,dx = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$

12. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\frac{\cos x}{\sin x} + C$

13. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$

14. $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C$

15. $\displaystyle\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx = \frac{e^{\alpha x}(\alpha\sin\beta x - \beta\cos\beta x)}{\alpha^2+\beta^2} + C \quad \text{als } \alpha^2+\beta^2 > 0$

16. $\displaystyle\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx = \frac{e^{\alpha x}(\alpha\cos\beta x + \beta\sin\beta x)}{\alpha^2+\beta^2} + C \quad \text{als } \alpha^2+\beta^2 > 0$

TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Uitwerkingen tentamen Functies van meerdere variabelen (2DE06) op dinsdag 16 januari 2007, 14.00 - 17.00 uur

---

1. $f_x = y^2 - 2x + 4 = 0,\ f_y = 2xy - 8y = 0 \ \to (x, y) = (a, b) = (2, 0),\ (4, -2),\ (4, 2).$
   Raakvlakvergelijkingen: $z = 4,\ z = 0.$

2. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$

3. $D_{\mathbf{u}} f(-1, 3)$ maximaal in richting $\mathbf{u} = \dfrac{\nabla f(-1,3)}{|\nabla f(-1,3)|} = \dfrac{(8,3)}{\sqrt{73}}.$

   Waarde van $D_{\mathbf{u}} f(-1, 3)$ in die richting is $\sqrt{73}$.

4. Enkele mogelijkheden:

   $$2 \int_0^{\sqrt{3}} \int_{2-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dydx = \frac{8}{3}\pi - 2\sqrt{3}.$$

   of

   $$2 \left(\int_0^{\pi/6} \int_0^{4\sin\theta} rdrd\theta + \int_{\pi/6}^{\pi/2} \int_0^{2} rdrd\theta \right) = \frac{8}{3}\pi - 2\sqrt{3}.$$

   of

   $$4\pi - 2 \left(\int_{\pi/6}^{\pi/2} \int_2^{4\sin\theta} rdrd\theta \right) = \frac{8}{3}\pi - 2\sqrt{3}.$$

5. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \int_0^{1-y^2} 15y^2 e^x \, dzdydx = 4(e - \frac{1}{e}).$

6. (a) $\displaystyle\int_K \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{-1}^{1} (4t - 3t^2)\, dt = -2.$

   (b) Parametervoorstelling R: $\mathbf{r}(t) = (-2, -3, -1) + (4t,\ 6t,\ 0),\ t \in [0, 1].$

   $\displaystyle\int_R \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 (-2 + 16t)\, dt = 6.$

   (c) Niet conservatief want $\displaystyle\int_K \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \neq \int_R \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$

7. $\displaystyle\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = \int_0^1 \int_0^1 (2x^2y + (2y^2 + x)(4 - x^2 - y^2))\, dxdy = \frac{713}{180}.$