TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Tentamen Functies van meer variabelen, deel A (2XE06) op vrijdag 1 juli 2005, 10.30 – 12.00 uur.

De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden. Bovendien dient U in alle gevallen uw antwoord te beargumenteren!

Een **niet-grafische** rekenmachine is toegestaan.

---

1. Laat het oppervlak S gegeven zijn door:

$$S = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \cos(\pi xz) + \sin(\pi yz) + \tfrac{5}{4} = x^2 + y^2 + z^2 \right\}$$

Bereken de vergelijking van het raakvlak in het punt $(1, 1, \frac{1}{2})$ aan het oppervlak S.

2. Bereken de booglengte van de kromme K tussen de punten $(0,0)$ en $(-1/2, 4/3)$ met K de kromme geparameteriseerd door:

$$x = \tfrac{1}{2}t^2 - t, \quad y = \tfrac{4}{3}t^{3/2}, \quad t \geq 0.$$

3. Bereken

$$\iint_S 2xy \, \mathrm{d}A.$$

Hier is S het gebied beschreven door $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2$ en $x^2 + y^2 \geq 4$.

4. Bepaal een benadering van de functie f in de vorm van een Taylorpolynoom van orde 2 in de buurt van het het punt $(2, 1)$ met

$$f(x, y) = \frac{1}{2 + x - 2y}$$

5. De functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is gedefinieerd door:

$$f(x, y) = \frac{x}{1 + y}.$$

Bereken de richtingsafgeleide in het punt $(0, 0)$ in de richting $(1, -1)$.

Voor de vraagstukken kunnen de volgende aantallen punten worden behaald:

Vraagstuk	1.	8 punten	Vraagstuk	2.	10 punten	Vraagstuk	3.	10 punten
Vraagstuk	4.	6 punten	Vraagstuk	5.	6 punten			

Het cijfer wordt bepaald door het totaal der behaalde punten door 4 te delen.

TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Uitwerking tentamen Functies van meer variabelen, deel A (2XE06) op vrijdag 1 juli 2005, 10.30 – 12.00 uur.

1.

Laat het oppervlak S gegeven zijn door:

$$S = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \cos(\pi xz) + \sin(\pi yz) + \tfrac{5}{4} = x^2 + y^2 + z^2 \right\}$$

Bereken de vergelijking van het raakvlak in het punt $(1, 1, \frac{1}{2})$ aan het oppervlak S.

We hebben dat S beschreven wordt door

$$f(x, y, z) = \cos(\pi xz) + \sin(\pi yz) + \tfrac{5}{4} - x^2 - y^2 - z^2 = 0$$

We krijgen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= -\pi z \sin(\pi xz) - 2x,\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \pi z \cos(\pi yz) - 2y,\\
\frac{\partial f}{\partial z} &= -\pi x \sin(\pi xz) + \pi y \cos(\pi yz) - 2z,
\end{aligned}$$

We vinden:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1, \tfrac{\pi}{2}) &= -\frac{1}{2}\pi - 2\\
\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1, \tfrac{\pi}{2}) &= -2\\
\frac{\partial f}{\partial z}(1, 1, \tfrac{\pi}{2}) &= -\pi - 1
\end{aligned}$$

De vergelijking van het raakvlak wordt dus gegeven door:

$$(-\frac{1}{2}\pi - 2)(x - 1) + (-2)(y - 1) + (-\pi - 1)(z - \tfrac{1}{2}) = 0,$$

of

$$(\frac{1}{2}\pi + 2)x + 2y + (\pi + 1)z = \pi + \tfrac{9}{2}$$

2.

Bereken de booglengte van de kromme K tussen de punten $(0, 0)$ en $(-1/2, 4/3)$ met K de kromme geparameteriseerd door:

$$x = \tfrac{1}{2}t^2 - t, \quad y = \tfrac{4}{3}t^{3/2}, \quad t \geq 0.$$

We lopen van $t = 0$ tot $t = 1$. De integraal is dan gelijk aan:

$$\int_K 1\,\mathrm{d}s = \int_0^1 \sqrt{(\tfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t})^2 + (\tfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t})^2}\,\mathrm{d}t.$$

We krijgen:

$$\int_0^1 \sqrt{(t-1)^2 + (2\sqrt{t})^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sqrt{(t-1)^2 + 4t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sqrt{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t + 1\,\mathrm{d}t$$

en dit resulteert in:

$$\left[\tfrac{1}{2}t^2 + t\right]_0^1 = \tfrac{3}{2}.$$

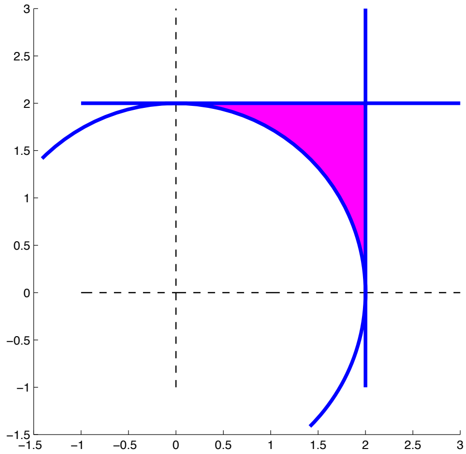
3.

Bereken

$$\iint_S 2xy\,\mathrm{d}A.$$

Hier is S het gebied beschreven door $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2$ en $x^2 + y^2 \geq 4$. en $x \geq y$.

Eerst tekenen we het gebied:



We hebben dus:

$$0 \leq x \leq 2, \quad \sqrt{4 - x^2} \leq y \leq 2.$$

We krijgen

$$\begin{aligned}
\iint_S 2xy\,\mathrm{d}A &= \int_0^2 \int_{\sqrt{4-x^2}}^2 2xy\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int_0^2 \left[xy^2\right]_{y=\sqrt{4-x^2}}^2 \mathrm{d}x \\
&= \int_0^2 4x - x(4 - x^2)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^2 x^3\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\tfrac{1}{4}x^4\right]_0^2 \\
&= 4.
\end{aligned}$$

4.

Bepaal een benadering van de functie f in de vorm van een Taylorpolynoom van orde 2 in de buurt van het het punt $(2,1)$ met $$f(x,y) = \frac{1}{2+x-2y}$$

We rekenen eerst de partiële afgeleiden uit:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{-1}{(2+x-2y)^2}\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{2}{(2+x-2y)^2}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{2}{(2+x-2y)^3}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{-4}{(2+x-2y)^3}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{8}{(2+x-2y)^3}
\end{aligned}$$

Daarna deze afgeleides bekijken in het punt $(2,1)$ levert op:

$$\begin{aligned}
f(2,1) &= \tfrac{1}{2}\\
\frac{\partial f}{\partial x}(2,1) &= -\tfrac{1}{4}\\
\frac{\partial f}{\partial y}(2,1) &= \tfrac{1}{2}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,1) &= \tfrac{1}{4}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2,1) &= -\tfrac{1}{2}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2,1) &= 1
\end{aligned}$$

Het Taylorpolynoom ziet er als volgt uit:

$$\begin{aligned}
f(x,y) \approx f(2,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(2,1)(x-2) + \frac{\partial f}{\partial y}(2,1)(y-1) + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,1)(x-2)^2\\
+ \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2,1)2(x-2)(y-1) + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2,1)(y-1)^2
\end{aligned}$$

en dit levert op:

$$f(x,y) \approx \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}(x-2) + \tfrac{1}{2}(y-1) + \tfrac{1}{8}(x-2)^2 - \tfrac{1}{2}(x-2)(y-1) + \tfrac{1}{2}(y-1)^2$$

of

$$f(x,y) \approx \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}x + \tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{8}x^2 - \tfrac{1}{2}xy + \tfrac{1}{2}y^2$$

Als alternatief kunnen we definiëren $s = x - 2y$ en dan eerst afleiden dat:

$$\frac{1}{2+s} \approx \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}s + \tfrac{1}{8}s^2$$

voor $s \approx 0$ en daarna substitueren dat $s = x - 2y$. Dit levert (natuurlijk) hetzelfde antwoord.

De functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is gedefinieerd door:

$$f(x, y) = \frac{x}{1+y}.$$

Bereken de richtingsafgeleide in het punt $(0, 0)$ in de richting $(1, -1)$.

We hebben:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1+y}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-x}{(1+y)^2},$$

en de gradiëntvector in $(0, 0)$ is dus gelijk aan

$$(1, 0)\,.$$

De richtingsafgeleide is het inproduct van de gradiëntvector met de richting maar dan moet die richtingsvector wel lengte 1 hebben. In ons geval is de lengte van de richtingsvector gelijk aan:

$$\sqrt{1+1} = 2$$

en de richtingsvector met lengte 1 is dus gelijk aan:

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{2}(1, -1).$$

Het inproduct hiervan met de gradiëntvector levert op:

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,(1+0) = \frac{1}{2}\sqrt{2},$$

en de richtingsafgeleide is dus $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.